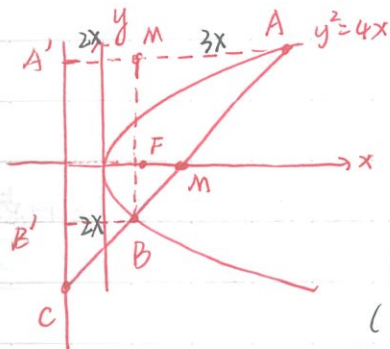


1. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($0 < \omega < 5$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x)$.
 $f(x + \frac{\pi}{3}) = f(-x)$. 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$, $k \in \mathbb{Z}$

i) 易知 $\omega = 2$. $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$

由 $f(x + \frac{\pi}{3}) = f(-x)$, $f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$
 整体思想. 正弦函数单调区间: 增 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 减 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$
 故 $2x + \frac{\pi}{6} \in [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$. (端点值处) $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$. 函数解析式确定

2. 抛物线 $E: y^2 = 4x$. 过 $M(2, 0)$ 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点 (A 在第一象限). 且 l 与 E 的准线交于 C . 若 $\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{2}{3}$. 则 l 的斜率为 $2\sqrt{6}$. 正解: 2 (注意相似比) (注意点位置)



若 $\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{2}{3}$. 则 $\frac{|CB'|}{|A'B'|} = \frac{2}{3}$

则 $\frac{|B'B|}{|A'A|} = \frac{2}{5}$

易错为 $\frac{|BB'|}{|AA'|} = \frac{2}{3}$

★★★ 一定注意此时的相似比!

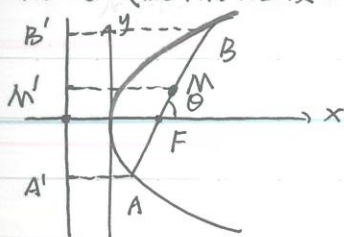
则 $BB' = x_B + 1$. $AA' = x_A + 1$ ($y^2 = 4x$)

(M 不是焦点! 不要果断用焦点弦结论!)

$\therefore \frac{x_B + 1}{x_A + 1} = \frac{2}{5}$ ① 再联立 $y^2 = 4x$, $x = my + 2$. $x_A x_B = 4$ ②

由 ①② $\Rightarrow x_A = 4$ $x_B = 1$ $y_A = 4$ $y_B = -2$ $k_l = 2$

抛物线的相关性质与结论.



① $AB = \frac{2P}{\sin \theta}$

② 焦点弦相垂直物成四边形: $S = 8P^2$

③ $|AF|$ (短) = $\frac{4P}{1 + \cos \theta}$

④ 过 $(a, 0)$ 的弦作切线, 两条切线交于

⑤ $|BF|$ (长) = $\frac{P}{1 - \cos \theta}$

$x = -a$ 上一点

⑥ $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{P}$

⑦ $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{4}P^2$

⑧ $|AB| = x_A + x_B + P$

C4
9

续: 三垂直: ($AM = BM$): $FA' \perp FB'$ $M'F \perp AB$ $M'A \perp M'B$

抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F . A 在第一象限且 $|AF| = 5$. 将直线 AF 绕点 F 逆时针旋转

45° 得到直线 l . l 与 C 交于 C, D 两点. 则 $|CD| = \frac{200}{49}$.

★ 3. 甲、乙进行抢答比赛，每人是否抢到题的可能性相同。共有3道题，答对则得10分，答错则对方得10分。甲答对每题概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙答对每题概率为 $\frac{1}{3}$ 。记甲的得分为 X ，求 X 的分布列及数学期望。（化繁为简，逐步求解）

★ 设每一道题甲答对的概率为 $P(A)$ ★ 分析

$$P(A) = \text{甲对} + \text{乙错} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{每道题目甲答对的概率。}$$

$$\text{甲得0分: } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \quad \text{甲得10分: } C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

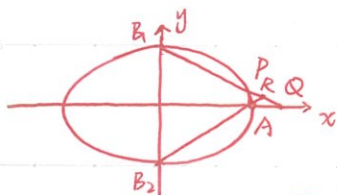
$$\text{甲得20分: } C_3^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \quad \text{甲得30分: } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

故 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{27} + 10 \times \frac{2}{9} + 20 \times \frac{4}{9} + 30 \times \frac{8}{27} = 20$$

4. 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 右顶点为 A ，上、下顶点分别是 B_1, B_2 。设 P 是第一象限 C 上的点， B_1P 与 x 轴交点为 Q ， B_2A 与 B_1P 交点为 R 。若 $\frac{S_{\triangle APR}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{4}{9}$ ，求 B_1P 的方程。



设 P, R 纵坐标为 y_1, y_2 。设 $Q(t, 0) \quad t > 2$

B_1Q 的方程为 $(\frac{x}{t} + \frac{y}{1} = 1)$ 截距式 ①

B_1Q 与 C 联立: $(t^2 + 4)y^2 - 2t^2y + t^2 - 4 = 0$

$$y_1 = y_1, y_{B_1} = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}$$

而 B_2A 方程为 $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② ①②联立求 R 坐标 $\Rightarrow y_2 = \frac{t-2}{t+2}$

$$\text{原式等价于 } \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{9} \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{5}{9} \quad \text{相似比}$$

$$\frac{\frac{t-2}{t+2}}{\frac{t^2-4}{t^2+4}} = \frac{5}{9} \Rightarrow t=1 \text{ 或 } 4 \Rightarrow B_1P \text{ 方程为 } x+4y-4=0$$

↓
舍

直线方程的表达形式

$\vec{AC} \cdot \vec{CB} < 0$ 是 $\triangle ABC$ 为钝角三角形的 既不充分也不必要 条件

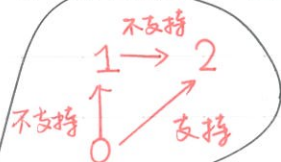
5. $\triangle ABC$ 中, $\sin A > \cos B$ 是 $\tan A \tan B > 1$ 的 必要不充分 条件.

常用逻辑用语的两种表述 A 是 B 的 条件 (缩句: A 是条件 B 是结论)

A 的 条件 是 B (B 是条件 A 是结论)

三角诱导公式, 三角恒等变换公式,

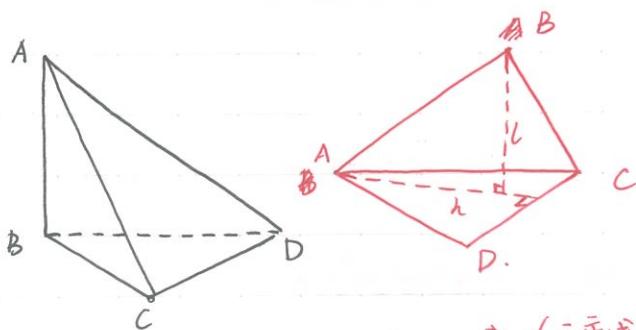
变式. 一个事件, 支持的人有 $\frac{3}{5}$, 不支持的有 $\frac{2}{5}$. 调查 m 个人, 支持得 2 分, 不支持得 1 分. 记总得分为 n . $n \in \mathbb{N}^*$. 求 $P(n)$ m 足够大.



$$P(n) = \frac{3}{5}P(n-2) + \frac{2}{5}P(n-1)$$

点,

6. 四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD . 证明四面体 $ABCD$ 的 4 个面均为直角三角形. (射影转换)



$$AB \perp \text{平面} BCD \Rightarrow AB \perp CD$$

设 $\triangle ACD$ 中 CD 上高为 h .

则 AB 在平面 ACD 内射影与 h 重合.

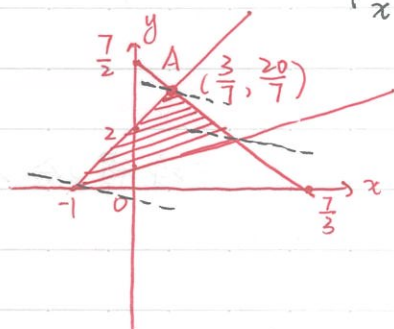
而平面 $ABC \perp$ 平面 ACD

$\therefore h$ 与 AC 重合. 故 $\angle ACD = 90^\circ$

$\Rightarrow$ (三垂线定理) $\angle BCD = 90^\circ$ $\angle ABD = 90^\circ$ $\angle ABC = 90^\circ$

7. 线性规划的各种情况

(1) 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0 \\ 3x + 2y - 7 \leq 0 \\ x - 4y + 1 \leq 0 \end{cases}$ 则 $z = x + 3y$ 的最大值为 9

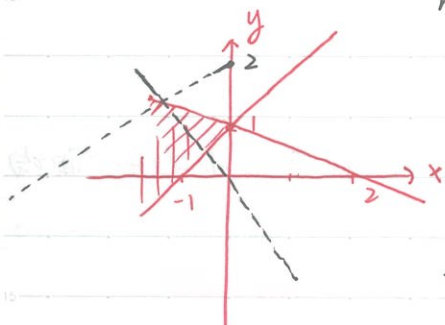


画出平面区域. $y = -\frac{x}{2} + \frac{2}{3}$ 已知式变形

再把取 z 最大的点 $A(\frac{3}{7}, \frac{20}{7})$ 代入

得 $z = 9$

(2) 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \leq 0 \\ x + 2y - 2 \leq 0 \\ mx + y \geq 0 \end{cases}$ 若 $z = -x + 2y$ 的最大值为 4, 则 m 为 $\frac{3}{2}$



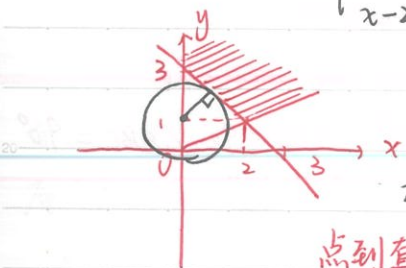
(1) 作出已知区域 (2) $\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{x}{2}$

则把 z 代入. $y = \frac{1}{2}x + 2$ 必过平面区域的边界点 (最靠上)

则点 $(x_0, \frac{1}{2}x_0 + 2)$ 为直线 $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \text{ ②} \\ mx + y = 0 \text{ ③} \end{cases}$ 的交点

$\Rightarrow x_0 = \frac{2}{1-2m}$. 再由①②③中式联立相消得 $m = \frac{3}{2}$.

(3) x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$ 则 $z = x^2 + (y-1)^2$ 的最小值为 2



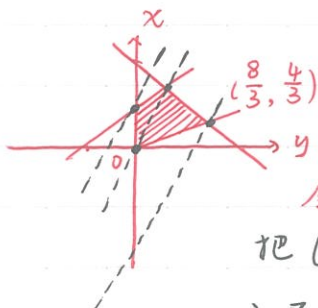
(1) 作出平面区域. (2) $x^2 + (y-1)^2 = z$ 表示:

以 $(0, 1)$ 为圆心, $\sqrt{z}$ 为半径的圆

故圆与平面区域边界相切时取到最小值

点到直线距离 $\Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{2} \Rightarrow z = 2$

(4). 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-4 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \end{cases}$ 则 $z = \frac{8^x}{2^y}$ 的最大值为 $2^{\frac{20}{3}}$



(1). 作出平面区域

(2). 原式等价转换

$$\frac{8^x}{2^y} = \frac{2^{3x}}{2^y} = 2^{3x-y} \Rightarrow \text{只需求 } 3x-y \text{ 最大值即可}$$

令 $k = 3x - y$ $y = 3x - k$ 对应此时截距的最小值.

把 $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ 代入 $k = \frac{20}{3} \Rightarrow 3x - y = \frac{20}{3}$

$\therefore z$ 最大值为 $2^{\frac{20}{3}}$

伯努利不等式

$$x > -1, a > 1 \quad (1+x)^a \geq 1+ax \quad ; \quad x > -1, 0 < a < 1 \quad (1+x)^a \leq 1+ax$$

即 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq -1$ 且同号, $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$

(Heard 赫尔德)

杨格不等式

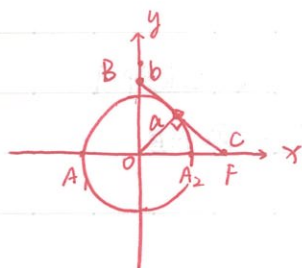
$$a, b > 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

$$\Delta \quad x, y \text{ 满足约束条件 } \begin{cases} 2x-y+3 \geq 0 \\ 2x+y-5 \leq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$z = |x-y| \text{ 取值范围是 } \xrightarrow{(1,1)} [0, \frac{7}{2}]$$

$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$ 视作 (x,y) 到 $x-y=0$ 距离 $\sqrt{2}$ 倍
类比为点到直线的距离.

8. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 左、右顶点为 A_1, A_2 . 点 $B(0, b)$. 若直线 BF 与以 $A_1 A_2$ 为直径的圆有交点, 则 C 的离心率的取值范围是 $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$



临界条件相切: $\Rightarrow b^2 = ac \quad e = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

且 b 越小越好, 则 $e \in (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

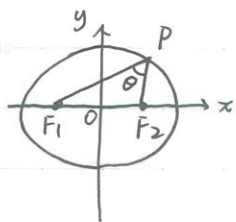
● 椭圆, 双曲线中的“粗略”计算 ●

椭圆: $e \uparrow$ 越扁 $e \downarrow$ 越圆 b 越小, e 越大 $e \in (0, 1)$

双曲线: $e \uparrow$ 张口越大 $e \downarrow$ 张口越小 b 越小, e 越小 $e \in (1, +\infty)$

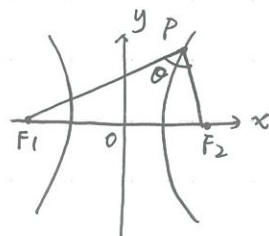
● 椭圆, 双曲线中的二级结论 ●

椭圆: $b^2 = ac \quad e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 双曲线: $b^2 = ac \quad e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (特殊)



$$S_{\triangle PF_1 F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$$

$$S_{\triangle PF_1 F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$$



x -型双曲线: $e^2 = k^2 + 1$ (k 是渐近线斜率)

y -型双曲线: $e^2 = (\frac{1}{k})^2 + 1$
 k 是渐近线斜率

9. 统计. 回归分析的基本思想

① 线性回归方程中的重要公式, 参数

回归直线方程: $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

② 非线性回归的回归方程 $\Leftrightarrow$ 线性回归方程的转化

e.g (1). $y = C_1 e^{C_2 x} \Rightarrow \ln y = \ln C_1 + C_2 x$ (取对等价转化)

令 $\ln y = z$ ($z = C_2 x + \ln C_1$) 换元. 得到类线性回归方程. 注意新元.

求得新元的回归方程之后再代入原回归方程拟合.

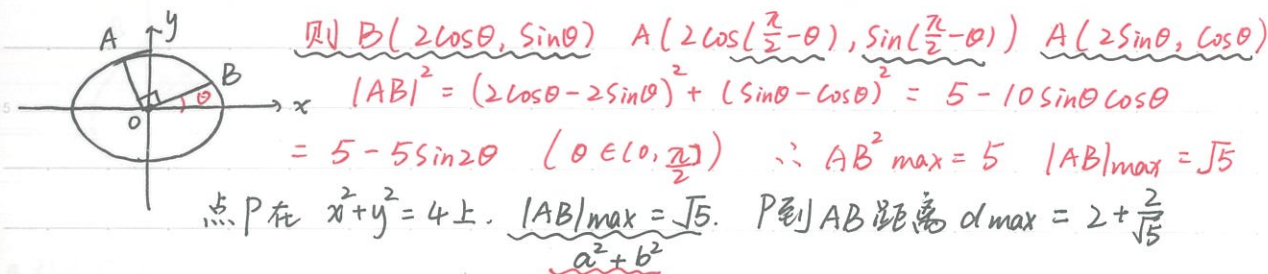
e.g (2). $y = C_3 x^2 + C_4 \Rightarrow y = C_3 t + C_4$. ($x^2 = t$ 换元) 注意新元范围.

渐近线
(斜率)

斜率

10. 椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, C的左, 右顶点为S, Q. 平面内一点P满足 $\vec{PS} \cdot \vec{PQ} = 0$. C上有A, B两点, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ (O为原点) 求 $S_{\triangle PAB}$ 最大值.

椭圆的参数方程 由 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow (\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$ ($\frac{x}{2} = \cos\theta, y = \sin\theta$)



$$S_{\triangle PAB_{\max}} = \sqrt{5} + 1 \quad (\text{拆分. 先求 } |AB|_{\max} \text{ 再求距离 } d_{\max})$$

拓展: $(OA^2 + OB^2)_{\max} = a^2 + b^2$ ($OA \perp OB$)

设AB上高为d ($OA \perp OB$) $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

证明方法 极坐标

$B(p_1, \theta)$ $A(p_2, \theta + \frac{\pi}{2})$

分别代入C方程中

(椭圆内准圆)

$\Rightarrow$

双曲线内准圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$ (存在时)

11. 函数 $f(x) = \ln(ax+1) - \frac{2x}{x+2}$. 若 $a \in (\frac{3}{4}, 1)$ 且 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 . 求 $f(x_1) + f(x_2)$ 的范围. (消参)

$$f'(x) = \frac{a}{ax+1} - \frac{4}{(x+2)^2} \quad \text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + 4a - 4 = 0. \quad (\Delta > 0)$$

$$x_1, x_2 = \frac{4a-4}{a} \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \text{得到方程关系韦达定理转化}$$

$$f(x_1) + f(x_2) = \ln(ax_1+1) + \ln(ax_2+1) - \left(\frac{2x_1}{x_1+2} + \frac{2x_2}{x_2+2}\right)$$

$$= \ln(a^2x_1x_2 + a(x_1+x_2) + 1) - \frac{4x_1x_2 + 4(x_1+x_2)}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} \quad \text{韦达定理代换}$$

$$= \ln(a(4a-4) + 1) - \frac{4(4a-4)}{\frac{4a-4}{a} + 4}$$

$$f(x_1) + f(x_2) = \ln(2a-1)^2 + \frac{2}{2a-1} - 2. \quad \text{令 } 2a-1 = t \quad t \in (\frac{1}{2}, 1) \text{ 换元}$$

$$f(x_1) + f(x_2) = g(t) = 2\ln t + \frac{2}{t} - 2$$

$$g'(t) = \frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) \in (0, 2 - \ln 2)$$

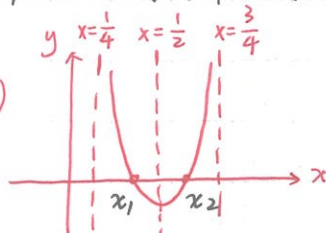
韦达定理消参法

12. (11同类题) 函数 $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x$ 在 $(\frac{1}{4}, +\infty)$ 上有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

则 $\frac{f(x_1)}{x_2}$ 的取值范围是 $(\frac{1}{2} - \ln 2, \frac{3}{4} - \ln 2)$

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x} \quad (\frac{1}{2} - \ln 2, \frac{3}{4} - \ln 2)$$

$y = 2x^2 - 2x + a$ 大致图象如图



由题 $x_1 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ $x_2 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{对称性性质消参, 韦达定理} \quad x_1 x_2 = \frac{a}{2}$$

一换则全换
等价转换

$$\therefore \frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{f(1-x_2)}{x_2} = \frac{x_2^2 + a \ln(1-x_2)}{x_2} = \frac{x_2^2 + 2x_1 x_2 \ln x_2}{x_2} = \frac{x_2^2 + 2(1-x_2)x_2 \ln(1-x_2)}{x_2}$$

$$\text{则 } \frac{f(x_1)}{x_2} = x_2 + 2(1-x_2) \ln(1-x_2) \quad \text{令 } g(x) = x + 2(1-x) \ln(1-x) \quad \star \text{换元要注意}$$

$$\text{研究 } g(x) \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \quad \frac{f(x_1)}{x_2} \in (\frac{1}{2} - \ln 2, \frac{3}{4} - \ln 2) \quad \star \text{新元的范围} \star$$

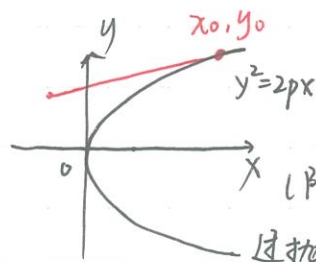
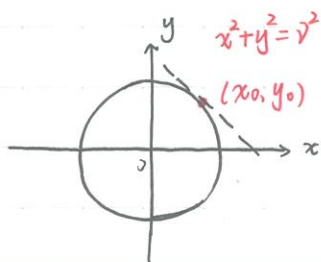
13. 已知点 P 在抛物线 $C_1: y^2 = mx$ ($m \neq 0$) 上. 过 P 作抛物线 $C_2: x^2 = 2y$ 的切线 l_1, l_2 . 切点记为 M, N . 若 $G(1, 1)$ 是 $\triangle MNP$ 的重心, 则 C 的准线方程为 $x = -\frac{1}{4}$.

$\star$ 圆锥曲线中的切线.

$D(x_1), E(x_2)$

i) 圆.

ii) 抛物线



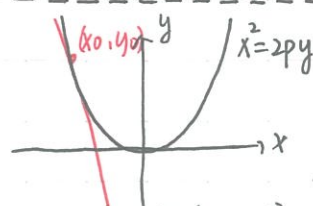
过 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$y - 2px_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

(隐函数求切线斜率. 方程)

过抛物线外 (x_0, y_0) 作两条切线

$$\text{切点弦方程: } y - 2px_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$



过 (x_0, y_0) 切线方程为

$$y - \frac{x_0^2}{2p} = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$$

且过抛物线外 (x_0, y_0) 作

两条切线的切点弦方程:

$$y - \frac{x_0^2}{2p} = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$$

过圆 $M: x^2 + y^2 = r^2$ 上一点作切线

切线方程为 $x_0 x + y_0 y = r^2$

过圆外 (x_0, y_0) 作两条切线

切点弦方程为 $x_0 x + y_0 y = r^2$

(证明方法: 两个切点均满足

$$x_0 x + y_0 y = r^2)$$



AB: $\odot OM - \odot AM$

圆方程相减 切线长: 几何法 (构成相互垂直四边形的S)

14. 二项式定理及其性质

二项式系数

 $(a+b)^n$ 的第 $k+1$ 项: $C_n^k a^{n-k} b^k$ 共有 $n+1$ 项

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^r x^r + \dots + x^n$$

- 二项式的幂指数为偶数: 中间一项二项式系数最大
 - 二项式的幂指数为奇数: 中间两项二项式系数最大
- 二项式系数先 $\uparrow$ 后 $\downarrow$
- 二项式系数和为 2^n : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ * 二项式系数和
 - 奇数项二项式系数和 = 偶数项二项式系数和 = 2^{n-1}

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}$$

- 与首末两端等距离的两个二项式系数相等.

$$(2-\sqrt{3}x)^{100} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{100} x^{100} \text{ 求}$$

$$(1) (a_0 + a_1) + (a_0 + a_2) + \dots + (a_0 + a_{100})$$

$$(2) a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}$$

$$(3) |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{100}|$$

特殊赋值法.

$$(1) \text{ 原式} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{100} + 99a_0$$

$$\text{令 } x=1 \quad (a_0 + a_1 + \dots + a_{100}) = (2-\sqrt{3})^{100}$$

$$\text{令 } x=0 \quad a_0 = 2^{100} \Rightarrow \text{原式} = (2-\sqrt{3})^{100} + 99 \times 2^{100}$$

$$\text{若 } (a+b)^n \text{ 有中间项, 则中间项为 } C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

15. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $x^2 \cos \theta - x(1-x) + (1-x)^2 \sin \theta > 0$ 恒成立. θ 的范围为_____.

-x

△ 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\ln \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \geq \sin^3 \theta - \cos^3 \theta$. 则 θ 的范围是_____.

$$\ln \cos \theta + \cos^3 \theta \geq \ln \sin \theta + \sin^3 \theta \quad \text{同构} \quad f(x) = \ln x + x^3$$

16. 函数 $f(x) = ax^2 + bx - \ln x$ 的两个零点为 x_1, x_2 ($x_2 > x_1$) 证明: $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) > 0$

$$\text{设其满足} \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 = \ln x_1 & ① \\ ax_2^2 + bx_2 = \ln x_2 & ② \end{cases}$$

$$① - ②, \text{有} \ln \frac{x_1}{x_2} = a(x_1+x_2)(x_1-x_2) + b(x_1-x_2)$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = (x_1-x_2)[a+b(x_1+x_2)]$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = (x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b] \quad ③$$

$$\text{而 } f'(\frac{x_1+x_2}{2}) \text{ 中, 由于 } f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x}$$

$$f'(\frac{x_1+x_2}{2}) = 2a \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + b - \frac{2}{x_1+x_2} \quad ④$$

$$③④ \text{ 代换 } f'(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \ln \frac{x_1}{x_2} - b + b - \frac{2}{x_1+x_2}$$

$$f'(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{1}{x_1-x_2} \left[\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2} \right]$$

$$\star f'(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{1}{x_1-x_2} \left[\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} \right]$$

令 $\frac{x_1}{x_2} = t \in (0, 1)$. 注意范围.

$$\text{令 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$$

($\frac{1}{x_1-x_2}$ 符号定. 只需判后面符号即可)

研究 $g(t)$ 得 $t \in (0, 1)$ $g(t) < 0$

$$\therefore f'(\frac{x_1+x_2}{2}) > 0$$

相关题:

$$\frac{1}{2}x^2 - (a-1)x - a \ln x = b \text{ 有 } x_1, x_2$$

两个不相等实数根.

$$\text{证明: } f'(\frac{x_1+x_2}{2}) > 0$$

17. 函数 $f(x) = e^x - \cos x$.

(1). 求 $g(x) = f'(x) - 2x$ 的最小值.

(2). 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f(x) \geq x^3 + ax^2$ 成立, 求 a 取值范围. (泰勒展开) 放缩.

(1). $g(x) = e^x + \sin x - 2x$

$F(x) = g'(x) = e^x + \cos x - 2$ $F'(x) = e^x - \sin x$

① $x \geq 0$ 时, $e^x \geq 1$ $\sin x \leq 1$ $g'(x) = e^x - \sin x > 0$

$F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上 $\uparrow$ $\therefore F(x) \geq F(0) = 0$. $\therefore g'(x) \geq 0$ $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上 $\uparrow$

② $x < 0$ 时, $e^x < 1$ $\cos x \leq 1$ $\therefore F(x) = e^x + \cos x - 2 < 0$

$g'(x) < 0$ $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

$\therefore g(x)$ 最小值为 $g(0) = 1$

(2) 记 $f(x) = x e^x - x \cos x - x^3 - ax^2$ (令定义域. 非边界点)

$f(0) = 0$ $f'(x) = (x+1)e^x - \cos x + x \sin x - 3x^2 - 2ax$ $f'(0) = 0$

$f''(0) = 2 - 2a \stackrel{=}{=} 0$ ② $a = 1$ (Fermat 原理)
 $a \leq 1$

Fermat 原理: 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 且 $f(x_0) = 0$ 则必有 $f'(x_0) = 0$

Fermat 原理. $f(x) \geq 0$ 或 $f(x) \leq 0$

仍背景下, 若 零点处 一阶导数值与参数有关

● 前提下 $f'(x_0) = 0$ 得到参数 唯一值

三角恒等变换公式: 和差化积. 积化和差

18. $f(x) = \begin{cases} |\ln x| & x > 0 \\ -x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$ 方程 $f(x) = a$ 有三个不同的实数根 ($x_1 < x_2 < x_3$).

则 $ax_1x_2x_3$ 的取值范围是 _____.

$$\Delta \quad 2\cos 50^\circ - \frac{1}{2}\tan 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ}{2} \Rightarrow \frac{4\cos 50^\circ - \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4\cos 50^\circ \sin 50^\circ - \cos 50^\circ}{2\sin 50^\circ} \Rightarrow \frac{2\sin 100^\circ - \cos 50^\circ}{2\sin 50^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin(50^\circ + 30^\circ) - \cos 50^\circ}{2\sin 50^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

19. $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (0, \pi)$. $\cos \alpha - 2\sin \alpha =$ _____.

⑥ 已知 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\tan 2\alpha + \cos \alpha = 0$, 则 $\sin \alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \cos \alpha = 0$$

$$\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha} + \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$$

三角恒等变换:

* α 为锐角. $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$. 则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{12}) =$

key $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{12}) = \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{7\sqrt{2}+8}{18}$

• $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\cos \alpha = \frac{1}{3}$. 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) =$

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin(2(\alpha + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{2}) = -\cos[2(\alpha + \frac{\pi}{3})] = -\frac{7}{9}$$

• $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$. 则 $\frac{\sin \alpha}{1 - \tan \alpha} = \rightarrow \alpha = 82^\circ$ $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$

原式 = $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -\frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}$

$\sin 2\alpha \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \frac{24}{25}$
 $\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{24}{25}$

$\Rightarrow$ 原式 = $\frac{7}{60}\sqrt{2}$

⑧ 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $2\sin(\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha - 1$, 则 $\sin \alpha =$

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$2\cos 2\alpha = -\sin \alpha$$

$$\alpha = \frac{37}{32}$$

* $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{2\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

* $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

* $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

* $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

* $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

诱导公式

三角函数压轴题总结

20. 锐角 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $a=1$, $b\cos A - \cos B = 1$. 若 $\sin B - 2\lambda \sin^2 A$ 存在最大值, 则正数 λ 的范围是_____.

$$\Rightarrow b\cos A - a\cos B = a \Rightarrow \sin B\cos A - \cos B\sin A = \sin A$$

$$\Rightarrow \sin(B-A) = \sin A \Rightarrow b = 2a \quad \sin B = 2\sin A$$

$$\Rightarrow \sin B - 2\lambda \sin^2 A \Rightarrow \sin 2A + \lambda \cos 2A - \lambda$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\lambda^2} \sin(2A+\varphi) - \lambda. \quad \text{且 } \tan \varphi = \lambda$$

$$\therefore 2A + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 可取.}$$

在锐角 $\triangle ABC$ 中 $\Rightarrow A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ [★] [一边是另一边的2倍的锐角三角形小角范围]

$$\therefore \varphi \in (0, \frac{\pi}{6})$$

★ 本题需注意

$$\therefore \tan \varphi \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

① 代换 ② 注意范围. 辅助角公式运用.

21. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边为 a, b, c . $a^2 - b^2 = bc$. 则 $\sin B + \sin C$ 范围是_____.

余弦定理: $c^2 - 2bc\cos A = bc \Rightarrow c - 2b\cos A = b$

正弦定理: $\sin C - 2\sin B\cos A = \sin B \Rightarrow \sin(A+B) - 2\sin B\cos A = \sin B$

$$\Rightarrow \sin(A-B) = \sin B \quad \therefore A = 2B \quad \star B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) \quad \sin B \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$a^2 = b^2 + bc = b(b+c) \Rightarrow b+c = \frac{a^2}{b} \Rightarrow \sin B + \sin C = \frac{\sin^2 A}{\sin B} = \frac{\sin^2 2B}{\sin B}$$

$$= \frac{4\sin^2 B \cos^2 B}{\sin B} = 4(\sin B - \sin^3 B). \quad \text{令 } \sin B = t \quad t \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$S = f(t) = 4(t - t^3) \quad \therefore \sin B + \sin C \in (\sqrt{2}, \frac{8\sqrt{3}}{9}]$$

规律: ① 一边是另一边的2倍的锐角三角形中小角范围是 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

22. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1$, $A=120^\circ$. 若 $\lambda b+c$ 有最大值, 则 λ 范围是 ____.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin(60^\circ - B)}{c} \quad \therefore \lambda b + c = \frac{2\lambda - 1}{\sqrt{3}} \sin B + \cos B \quad (\lambda \neq \frac{1}{2}).$$

$$0 < B < \frac{\pi}{3}, \quad \lambda b + c = \sqrt{\left(\frac{2\lambda - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \cdot \sin(B + \varphi) \quad \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\lambda - 1}$$

$$\therefore \exists \varphi, \text{ 使得 } \varphi + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

若

★ 辅助角公式的一个结论: 若有 $a \sin B + b \cos B = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(B + \varphi)$
 则 $\tan \varphi = \frac{a}{b}$ $x = \varphi$ 代表极值点, 对称轴

★ 另外方法: 求导研究.

• $\triangle ABC$ 中 $a = \sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 范围是 ____.

$$f(x) = a \sin x + b \cos x \quad \text{不变符号}$$

$$\text{对称轴: } \tan \theta = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \sin x \text{ 与 } \cos x \text{ 与 } \theta$$

△ 函数 $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$ 的一个单调递增区间是 ____.

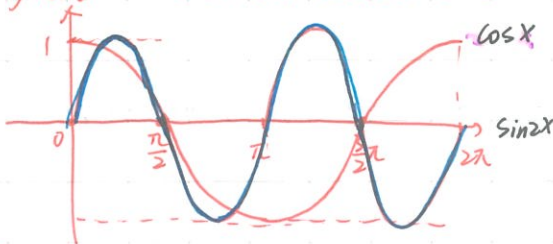
A. $(0, \frac{\pi}{2})$

B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

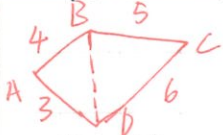
D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x > 0 \quad \text{即 } \cos x > \sin 2x$$



故选 D

△ 平面四边形 ABCD 面积为 $3\sqrt{6}$. $AB=4$ $AD=3$ $BC=5$ $CD=6$. $\cos(A+C) = \frac{7}{10}$.



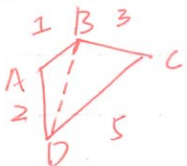
余弦: $5 \cos C - 2 \cos A = 3$ ①

正弦: $S = 3\sqrt{6} = 6 \sin A + 15 \sin C$ ②

$29 = 20 \cos(A+C) = 15$

化简, 平方和 $a(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a$ 消元

△ 平面凸四边形 ABCD 中, $AB=1$ $BC=3$ $CD=5$ $DA=2$. $S_{\text{四边形} ABCD \max} =$ ____.



余弦: $30 \cos C - 4 \cos A = 29$ ①

正弦: $S = \sin A + \frac{15}{2} \sin C$ ②

$16S^2 = 75 - 240 \cos(A+C)$

$\therefore S_{\max} = \sqrt{\frac{75 + 240}{16}} = \frac{\sqrt{315}}{4}$

△ 平面四边形已知 4 条边长通用法: 正弦 + 余弦 两步再平方和化简

抽象函数图像与零点分布. 函数综合

一定注意其内外嵌套性.

函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x|, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 则 $g(x) = 2f(f(x)-1) - 1$ 的零点个数为 8. (8) ✓

$2f(f(x)-1) = 1 \Rightarrow f(u) = \frac{1}{2} \rightarrow$ 找 u . $f(x)-1 = u$
 $f(x) = u+1$ $2' + 1' + 4' + 1' = 8$ 个

定义: $a * b = \begin{cases} 2a - 2b, & a > b \\ 2b - 2a, & a < b \end{cases}$ 则函数 $f(x) = \sin x * \cos x$ 的值域为 $[-2, 2]$. $[0, 2\sqrt{2}]$ ✓

$a * b \Rightarrow 2|a - b|$

函数 $f(x) = \begin{cases} a \ln x + \frac{x}{2}, & x > 0 \\ 2x^2 - 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 若 $g(x) = f(x) - x$ 仅有 1 个零点, 正数 a 范围是 $(0, \frac{e}{2})$ ✓

$f(x) = x$ 有一根. $2x^2 - 2$ 与 x 有一根 $\Rightarrow (a \ln x + \frac{x}{2} \text{ 与 } y = x \text{ 无交点})$ 切线斜率最小时为界点.

函数 $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} - 3k, & x < 0 \\ |x^3 - 4x - 1| - 3k, & x \geq 0 \end{cases}$ $g(x) = f(x) - kx$ 有 4 个不同零点, k 范围是 .

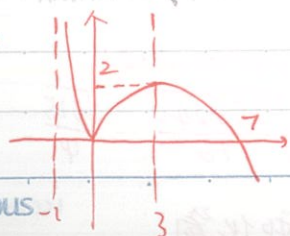
函数 $f(x) = \frac{1}{|x-1|-1}$, $g(x) = x^2 - 2x - a$, $f(x) = g(x)$ 从小到大有 x_1, x_2, x_3, x_4 4 个不同实根, 则 $a(x_1 + x_4 - x_3)$ 范围是 $(0, +\infty)$.

函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 7, & (x \geq 3) \\ |\log_{\frac{1}{2}}(x+1)|, & (-1 < x < 3) \end{cases}$ 方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + m + 2 = 0$ 有 6 个不同的

实数根, 则 m 范围是 $(-2, 0)$ ✓

$t_1 \in (0, 2)$ $t_2 \in (0, 2)$

$f(x)$:



$f(x) = t$.

$t^2 + mt + m + 2 = 0$ 至多 2 根

$\therefore t_1, t_2$ 在 $f(x)$ 中分别对应 3 个根, 即

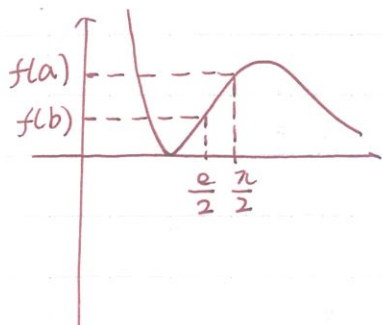
$\begin{cases} t_1 + t_2 = -m \\ t_1 t_2 = m + 2 \end{cases}$ 取交集

分清函数内外关系

$f(g(x)) = m$ 类型中, $g(x)$ 的

- 函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ (x^3 + 2x^2)e^x, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) - ax^2$ 有 4 个不同的零点, a 范围是 .
 “只看一边” 大致图像中 2 个 零点 $(0, \frac{1}{e})$

- $f(x) = |\frac{\ln x}{x}|$, $a = f(\frac{\pi}{2})$, $b = f(\frac{e}{2})$, $c = f(\frac{2}{3})$, 则 $c > a > b$



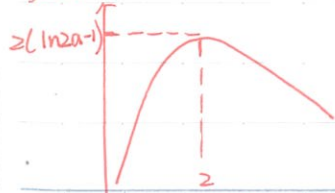
确定 $f(\frac{2}{3})$ 的位置

- $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, $[f(x)]^2 + af(x) - b^2 < 0$ 有 1 个整数解, a 最大值为

- $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x, & x \geq 0 \\ -x^3 - 3x^2 + 4, & x < 0 \end{cases}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x[f(x) - a] \geq 0\}$ 若 A 中只有 4 个元素, 满足条件的整数 a 有 个.

- Δ $f(x) = 2 \ln(ax) - x$, $a > 0$, $F(x) = f(f(x)) - x$ 有 2 个零点, a 范围

$f(x)$:



且 $f(x)$ 与 x 在 $x=1$ 处切线斜率相同

$$\begin{cases} a > e & f(x) = x \text{ 两解} \\ a = e & f(x) = x \text{ 一解} \\ a < e & f(x) = x \text{ 无解} \end{cases}$$

$$f(t) = x \text{ 2解, } t = f(x)$$

需关系对应, 1个 t ($f(x)$) 对 2解

$\therefore (t=1)$ 即 $f(t)$ 与 x 相切

$$\therefore 2 \ln a - 1 > f(1) = 1$$

$$a > e$$

保证相切

(x) 的解对应 $f(x)$ 中相应点数值 (解的个数)

导数综合

• a, b 满足 $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 2$, 则当 $x > 0$ 时 $(x-a)^2 + (\ln x - b)^2$ 的最小值为 8.

导数几何意义 $y = \ln x$ 到 $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 2$ 的距离平方. $\Rightarrow \ln x \leq x-1$ 切线放缩

设切点 $(r_{\min} = 2\sqrt{2}, r^2 = 8)$

例11 $f(x) = x - 1 + ae^{-x}$ 存在两条过原点的切线, 则 a 的范围是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$

$\Rightarrow$ 切线方程 $x_0 - 1 + ae^{-x_0} = (1 - \frac{ae}{e^{x_0}})x_0 \Rightarrow$ 参变分离画图像 $\checkmark$

$$\frac{1}{a} = \frac{e(1+x)}{e^x} \quad \text{广义形式上的参变分离}$$

• $f(x) = \frac{e^x}{x} - m(\ln x + x + \frac{2}{x})$ 恰有 2 个极值点, 则 m 的范围是 $(\frac{1}{2}, \frac{e}{3}) \cup (\frac{e}{3}, +\infty)$

$\Rightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} = m(\frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2})$ 有 2 个正根 $\Rightarrow e^x(x-1) = m(x+2)(x-1)$

$x=1$ 为一根. 画图像找另一个不为 1 的正根

• 对于 $\forall x > 0$, $a^2x^2 - (ax+1)\ln x - ax - 2 \geq 0$, 则 a 的范围是 $a \geq e$ 或 $a = -e^3$

提取公因式 $(ax+1)(ax-2-\ln x) \geq 0$

$\checkmark$ ① $(ax+1) \geq 0$ $(ax-2-\ln x) \geq 0$ ② $(ax+1) \leq 0$ $(ax-2-\ln x) \leq 0$ (交点)

例12 $C_1: y_1 = e^{x+m}$, $C_2: y_2 = x^2$ 若恰有 2 条直线与 C_1, C_2 均相切, 则 m 的范围是 $(-\infty, 2\ln 2 - 2) \cup (\ln e - \ln 2, \frac{\ln e}{2})$

公共切线一般方程: $\checkmark$ 以 C_2 构造切线截线代 C_1 求解

$(-\infty, 2\ln 2 - 2) \cup (\ln e - \ln 2, \frac{\ln e}{2})$

$\checkmark$ 若 $y = kx + b$ 与 $y = \ln x + 2$, $y = \ln(x+1)$ 相切, 则 $b =$ (2016 全国 II 16) $1 - \ln 2$

• 函数 $f(x) = \ln x - m$ 与 $g(x) = -x^2 + \frac{7}{3}x$ 在 $[1, 3]$ 上有关于 x 轴对称的点, m 范围是 $[\frac{1}{3}, \frac{e}{2}]$

例13 $\checkmark$ 变式. 过 (a, b) 可作 $y = e^x$ 两条切线, 则 (2021 新高考 I 7)

A. $e^b < a$ B. $e^a < b$ C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$

例3变1 过 (a, b) 可作 $y = \ln x$ 两条切线, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$ 判断关系.

过 (a, b) 可作 $x^2 = 2py$ 的两条切线, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$.

切线问题: 切点入手 $\Rightarrow$ 切线条数 $\Leftrightarrow$ 切线方程零点个数

过点作切线: 曲线切线过该点消参

Campus

两/多曲线同时与直线相切: 设由一个切点入手设方程代入另一点求解.

三角函数图像

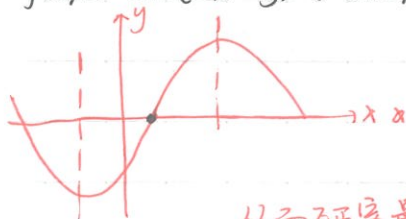
函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$. 若 $f(x + \frac{\pi}{6}) = f(-x)$, $f(x - \frac{\pi}{3}) = -f(-x)$ 则 ω, φ 不可能是

A. $\omega = 6 \quad \varphi = \pi$ B. $\omega = 2 \quad \varphi = \frac{4}{3}\pi$ C. $\omega = -2 \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi$ D. $\omega = 4 \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$

函数的对称性质

★ key: $f(x + \frac{\pi}{6}) = f(-x)$ 函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称.
 $f(x - \frac{\pi}{3}) = -f(-x)$ 函数 $f(x)$ 关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称.

$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$. $(m, 0)$ 是 $f(x)$ 对称中心, $x = n$ 是 $f(x)$ 对称轴. $|m - n|_{\min} = \frac{\pi}{2}$ (不代表 $\frac{T}{2}$)



对称中心: $m = \frac{\pi}{6} \pm \frac{k_1}{2}\pi$ 轴: $n = \frac{5}{12}\pi \pm \frac{k_2}{2}\pi$

$$|m - n| = \left| \frac{\pi}{6} + \frac{k_1}{2}\pi - \frac{5}{12}\pi - \frac{k_2}{2}\pi \right| = \left| -\frac{\pi}{4} + \frac{(k_1 - k_2)}{2}\pi \right|$$

从而研究最值.



导数

切线专题

例3 变2

$f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. $f(x)$ 在 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 的切线相互垂直, 且分别交 y 轴于 M, N . $\frac{|AM|}{|BN|}$ 范围是 _____. (2021 新高考 II 16)

$$AM: k_{AM} = -e^{x_1} \quad k_{BN} = e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} \cdot e^{x_2} = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 0}$$

代换: $B(x_0, e^{x_0} - 1)$ $A(-x_0, 1 - e^{-x_0})$ $x_0 > 0$

$$BN: y - e^{x_0} + 1 = e^{x_0}(x - x_0) \quad AM: y + e^{-x_0} - 1 = e^{-x_0}(x + x_0)$$

$$y_N = e^{x_0} - x_0 e^{x_0} - 1 \quad y_M = x_0 e^{-x_0} - e^{-x_0} + 1$$

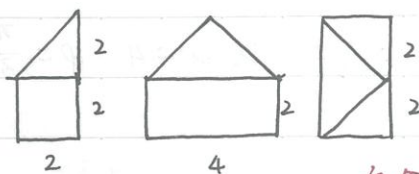
$$\frac{|AM|^2}{|BN|^2} = \frac{(xe^{-x})^2 + x^2}{(xe^x)^2 + x^2}$$

$$\frac{|AM|}{|BN|} = \sqrt{\frac{e^{-2x} + 1}{e^{2x} + 1}} \rightarrow \text{注意取值定义域} \in (0, 1)$$

• 设 x_0 是 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$ 的一个零点. 证明 $y = \ln x$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 的切线也是 e^x 的切线 (2019 全国 II 20)

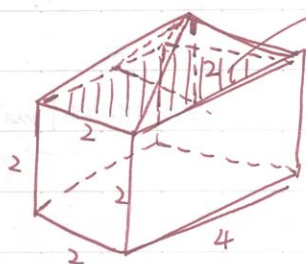
$$e^x - \frac{1}{2}x^2 \rightarrow x$$

某几何体三视图如图，其表面积为



错解: $44 + 8\sqrt{2}$

正解: $36 + 8\sqrt{2}$ 视图还原



这个面不能算入表面积!

3 → 顶面被三棱锥包住了，不记入表面积

$$S_{\text{表}} = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times 2$$

$$+ \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} + \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} \times 2 + \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{2} = 36 + 8\sqrt{2}$$

• $f(x) = a^x$ $g(x) = \log_a x$. $a > 1$ (2018 天津 20)

(1) 若 $f(x)$ 在 $(x_1, f(x_1))$ 处切线与 $y = g(x)$ 在 $(x_2, g(x_2))$ 处切线平行，证明 $x_1 + g(x_2) = -\frac{2\ln a}{\ln a}$

(2) 当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l 同时与 $f(x)$, $g(x)$ 相切。

• $f(x) = a(x-1)$, $g(x) = (ax-1)e^x$. 若 $f(x)$, $g(x)$ 相切于 $P(x_0, y_0)$ 证明 $0 < x_0 < 1$

• $f(x) = x^2 - \ln x$ 上是否存在两点 (x_1, y_1) (x_2, y_2) , $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ 使过该两点切线相互垂直?

• $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + ax$ 有一条斜率为 1 的公切线. $a = \underline{-1}$.

• 过 $M(-1, 0)$ 作 $f(x) = 2x^3 + ax + a$ 的两条切线，它们与 y 轴交于 A, B . 若 $|MA| = |MB|$, $a = \underline{\quad}$.

二项式定理.

6
12 11
P

- $(1+x+\frac{1}{x^{2020}})^{12}$ 的展开式中 x^2 项的系数为 Δ 排列组合法

欲得到 x^2 , 需在 12 个相乘的因式中取 2 个 x , 10 个 1

$$\underline{C_{12}^2 \cdot C_{10}^{10}}$$

$$C_{12}^2 \cdot C_{10}^{10} = 66 \quad \checkmark \quad \text{排列组合法}$$

面积 • $(x+1)(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中各项系数之和为

令 $x=1$ 赋值得值. $(1+1)(2-1)^6 = 2$

8√2 利用赋值法求展开式中各项的系数之和.

- ★ • $(x^2+1)(4x-3)^8 = a_0 + a_1(2x-1) + a_2(2x-1)^2 + \dots + a_{10}(2x-1)^{10}$. 则 $a_1 + \dots + a_{10} =$

赋值得值 令 $x=1$ $2 = a_0 + a_1 + \dots + a_{10}$ ①

令 $x=\frac{1}{2}$ $a_0 = \frac{5}{4}$ ②

① - ②. $\sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{3}{4}$ (原理与题 2 一致. 利用赋值法求展开式的系数和)

- 若 $(x-2)^5 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_5(x+1)^5$. 则 $a_3 = 90$.

原式变换 $(x+1-3)^5 = a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_5(x+1)^5$

$$T_{k+1} = C_5^k (x+1)^{5-k} (-3)^k \quad \text{令 } k=2 \quad \text{原式} = 90$$

变换形式

- 点 $P(1,1)$, 且与 $y=x^3$ 相切的直线条数为 2. $\Rightarrow$ 统一形式切线方程零点个数

- $a > 0$. $f(x) = 3x^2 - 4ax$ 与 $g(x) = 2a^2 \ln x - b$ 有公共点, 且公共点处切线相同. b 范围是 $[-\frac{1}{e^2}, +\infty)$

二若 $f'(x) \neq g'(x)$, 加取舍 $x=a$

$$3a^2 - 4a^2 = 2a^2 \ln a - b \quad \text{构建新函数讨论}$$

公共切线方程零点个数为 2.

- $f(x) = ax^2$ 与 $g(x) = \ln x$ 有 2 条公切线. a 的范围是 $(\frac{1}{2e}, +\infty)$

加权平均不等式, $x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$
且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$

$$\therefore x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

不等式选讲.

柯西不等式

$$\sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2 \geq (\sum a_k b_k)^2$$

方和积 > 积和方

$$(a+c)^2(b+d)^2 \geq (ac+bd)^2 \quad \text{平方和}$$

eg. 正实数 a, b, c 满足 $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$

证明: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{6}$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{c}{3}})^2 \leq (1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2)(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}) = 6$$

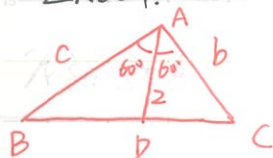
原不等式即得证.

正数 a, b, c 满足 $a+b+c=3$ 证明 $\frac{4}{a+3} + \frac{4}{b+3} + \frac{4}{c+3} \geq 3$

柯西不等式(变形)

$$\frac{4}{a+3} + \frac{4}{b+3} + \frac{4}{c+3} \geq \frac{(2+2+2)^2}{a+b+c+9} = \frac{6 \times 6}{12} = 3 \quad \text{原不等式即得证.}$$

• $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$. $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于 D . $AD=2$. $(AB+2AC)_{\min} =$



方法: 整体 + 局部正弦定理表示面积

$$\frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{2b+c} = \frac{1}{2} \geq \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2b+c} \therefore (2b+c)_{\min} = 6+4\sqrt{2} = (AB+2AC)_{\min}$$

• eg 同变 $\triangle ABC$ 中 $\sqrt{3}c \cos A + a \sin C = 0$ A 的平分线交 BC 于 D . $AD=1$. $(b+c)_{\min} =$

解法: $A = \frac{2}{3}\pi$

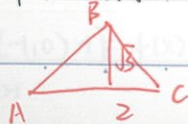


$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \geq \frac{4}{b+c} \therefore (b+c)_{\min} = 4$$

• $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 射影定理: $c \cos A + a \cos C = b$ / $b \cos A + a \cos B = c$
 $c \cos B + b \cos C = a$

• $\triangle ABC$ 中 $c \cos A + a \cos C = 2$, AC 边上高为 $\sqrt{3}$. $\angle ABC_{\max} = 60^\circ$

$\Rightarrow b=2$



三角函数与导数综合

$f(x) = e^x + \cos x - ax - 2$. 若 $xf(x) \geq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 成立, a 的取值范围是 $[-\infty, 1]$

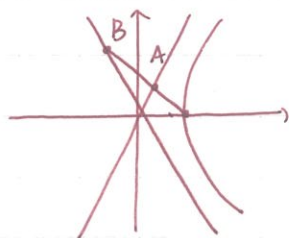
$$xe^x + x\cos x - ax^2 - 2x \geq 0. \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x(x+1) + \cos x - x\sin x - 2ax - 2 \quad f'(0) = 0 \quad xf(x) \geq 0 \quad [-\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

$$f''(x) = e^x(x+2) - \sin x - \sin x - x\cos x - 2a \quad f''(0) = 2 - 2a > 0 \quad a \leq 1$$

• 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右顶点 A 作 $k=1$ 的直线与其两条渐近线交于 B, C .

$$\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{BC}. \text{ 则 } e = \sqrt{5}$$

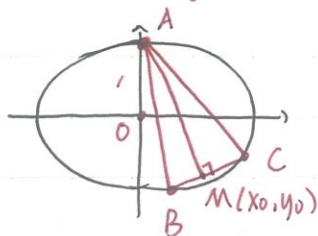


$$\text{设直线 } y = -x + a$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y_1 = \frac{b}{a} \Rightarrow x_A \rightarrow y_A \\ y_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_B \rightarrow y_B \end{cases} \rightarrow \text{结合向量相似转化.}$$

• 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 与以点 $(0,1)$ 为圆心的圆有四个交点, e 范围是 —

由对称性 $\rightarrow y$ 轴一侧 2 个交点.



有 $AB=AC$. 设 M 是 BC 中点 $AM \perp BC$.

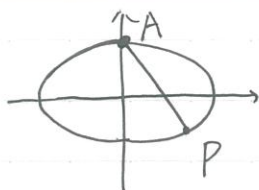
$$\text{结论: } k_{OM} \cdot k_{BC} = e^2 - 1$$

$$k_{AM} \cdot k_{BC} = -1$$

$$k_{OM} = \frac{y_0}{x_0} \quad k_{AM} = \frac{y_0 - 1}{x_0}$$

$\rightarrow$ 代换

变式: 2021 全国乙 11



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|AP| \text{ 的最大值满足 } i) -b < -\frac{b^3}{c^2} \quad \max = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{b^4}{c^2}}$$

$$ii) -b \geq -\frac{b^3}{c^2} \quad \max = 2b.$$

$$\text{此时 } e \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

不等式证明:

4. $f(x) = ax^2 - a - \ln x$, 若 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上成立, 求 a 的范围.

证: $ax^2 - a - \ln x > \frac{1}{x} - \frac{e}{e^x}$ 令 $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{e^x}$ $g(x)_{\max} = g(1) = 0$

又需证 $ax^2 - a - \ln x > 0$ 令 $h(x) = ax^2 - a - \ln x$

$h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} \quad (x > 1)$

① $a > 0$ $h'(\sqrt{\frac{1}{2a}}) = 0$. $h(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{1}{2a}}) \downarrow$ 在 $(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty) \uparrow$

i) $\sqrt{\frac{1}{2a}} \leq 1$, $a \geq \frac{1}{2}$, $h(x)_{\min} = h(1) = 0$ 合题意

ii) $\sqrt{\frac{1}{2a}} > 1$, $0 < a < \frac{1}{2}$ $h(x)_{\min} = h(\sqrt{\frac{1}{2a}}) = \frac{1}{2} - a - \ln \sqrt{\frac{1}{2a}} \quad [a \in (0, \frac{1}{2})] \leq -1$. 不合题意

② $a \leq 0$ $h(x)$ 在 $(1, +\infty) \downarrow$ 不合题意.

a 的范围: $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 法二: 参变分离法.

法三 必要性法. $g(x) = ax^2 - a - \ln x - \frac{1}{x} + e^{1-x}$ $g(1) = 0$

$g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$ $g'(1) = 2a - 1 \geq 0 \therefore a \geq \frac{1}{2}$

★ 数列求和★

★ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. 则 $S_{20} = \frac{2^{21} - 2}{5}$

$S_{20} = 2 + 2^5 + 2^2 + 2^5 + 2^6 + 2^9 + 2^{10} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{17} + 2^{18}$

$= (2 + 2^5 + 2^9 + 2^{13} + 2^{17}) + (2^2 + 2^6 + 2^{10} + 2^{14} + 2^{18}) \Rightarrow$ 分解成等比数列求和类型.

⑦ 取倒数典例

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2$ $a_{n+1} = -\frac{2}{a_n} - a_{n-1}$.

设 $P_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ $Q_n = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}$. 则

A. $P_{2022} - Q_{2022} > -1$ B. $P_{2022} - Q_{2022} < -1$

C. $P_{2022} + Q_{2022} > -\frac{1}{2}$ ☒ D. $P_{2022} + Q_{2022} < -\frac{1}{2}$

★ 数列求和 ★ ① 求 a_n .①. S_n, a_n 关系式

$$S_n = 2a_n + 1 \Rightarrow \text{首项差并} \begin{cases} S_n = 2a_n + 1 & ① \\ S_{n-1} = 2a_{n-1} + 1 & ② \end{cases} \quad ① - ② \quad a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow a_n \text{ 变化} \quad S_n - S_{n-1} = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = 1 \quad \text{构造新数列}$$

② 累加法. $(a_{n+1} - a_n = k)$ 形式

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \quad (a_1 \text{ 一般给出})$$

③ 累乘法 $(a_{n+1} = k a_n)$ 形式

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (a_1 \text{ 一般给出})$$

④ 待定系数法 (连续2项递推关系) $a_{n+1} = m a_n + f(n)$ 构造法. $(m \neq 1)$

原理: 见谁拆谁

$$a_{n+1} = p a_n + q \Rightarrow a_{n+1} + x = p(a_n + x) \quad \text{新辅助数列. 从而解 } x.$$

$$a_{n+1} = p a_n + A n + B \Rightarrow a_{n+1} + x n + y = p[a_n + x(n-1) + y] \quad \text{新辅助数列}$$

⑤ 相除法

$$a_{n+1} = A a_n + B \cdot C^m \Rightarrow \text{降幂除法处理. 构造出新的数列递推关系式}$$

⑥ 取对数

$$a_{n+1} = a_n^2 \Rightarrow \lg a_{n+1} = 2 \lg a_n \quad a_{n+1} = A a_n^2 + B a_n + C. \quad \text{同样取对数}$$

⑦ 取倒数

$$a_{n+1} = \frac{p a_n}{q a_n + m d} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q a_n + m d}{p a_n}$$

⑧ 特征方程不动点.

$$a_{n+1} = \frac{x a_n + y}{p a_n + q} \Rightarrow \text{令 } a_n = \frac{x a_n + y}{p a_n + q} \text{ 解方程}$$

$$\begin{cases} \text{无根} & \text{同其同数列} \\ \text{两实根} & a_{n+1} = \frac{1}{a_n - x} \text{ 等差数列} \\ \text{两虚根} & a_{n+1} = \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} \text{ 等比数列} \end{cases}$$

⑨ 连续三项递推关系

$$a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$$

$$\Rightarrow (a_{n+2} - x a_{n+1}) = y (a_{n+1} - x a_n) \text{ 类似 ④ 中待定系数从而求解.}$$

⑩ ~~错位相减~~ ⑪ ~~裂项相~~

▲ 数列 ①

等差数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n, T_n . 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n-1}{2n+3}$. 则 $\frac{a_9}{b_{11}} =$

答案: $\frac{10}{9}$

下标不同. 特殊化策略.

等差数列前 n 项通式 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$

$$S_n = n(3n-1) \quad T_n = n(2n+3) \quad \text{因此 } a_n = 6n-4 \quad b_n = 4n+1$$

▲ 设 $a > 0, b \neq 0, a + |b| = 3$. 则 $\frac{9}{a} + \frac{b+3}{|b|}$ 的最小值为 ____.

答案: $3 + 2\sqrt{3}$

二元变单元. 分类讨论

$\frac{9}{a} + \frac{b+3}{3-a}$ 分 $b = 3-a$ 和 $b = a-3$ 两种情况讨论.

▲ 连续多项关系数列.

• $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n \cdot a_{n+1} = \frac{n}{n+2}, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{2n} = \underline{\hspace{2cm}}, a_n = \underline{\hspace{2cm}}.$

▲ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{2}{5}, a_{n+1} = a_n + a_n^2$. 设 $S = \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_{2020}+1}$.
若 $S \in (t, t+1)$. 则整数 $t = \underline{\hspace{2cm}}$. (取到数)

★ 正项数列中 $a_1 > 1, 6S_n = a_n^2 + 3a_n + 2$. 若 $\forall a \in [-2, 2] \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} < 2t^2 + at - 1$ 成立. 求 t 范围.

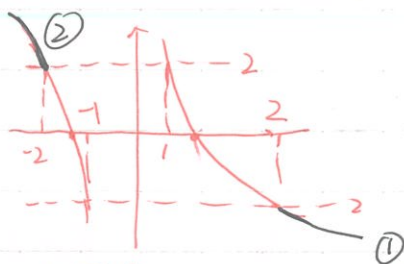
$$a_n = 3n+1 \Rightarrow 2t^2 + at - 4 \geq 0$$

即 ① $t > 0 \rightarrow a \geq \frac{4-2t^2}{t}$ ①

$t < 0 \rightarrow a \leq \frac{4-2t^2}{t}$ ②

一定注意分类讨论

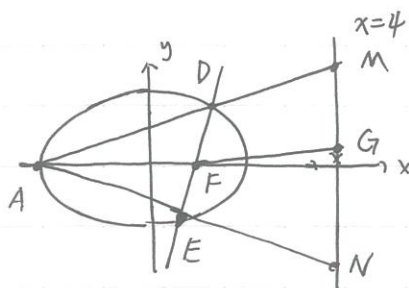
• 端点值研究法



由图像. $t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

圆锥曲线

(1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 如图, G 为 MN 中点, 证明: $FG \perp DE$



设 $DE: x = my + 1$. 与 C 联立

$$(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$$

$$D(x_1, y_1) \quad E(x_2, y_2)$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$$

$$AD: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) \Rightarrow M(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2})$$

$$\text{同理} \Rightarrow N(4, \frac{6y_2}{x_2 + 2})$$

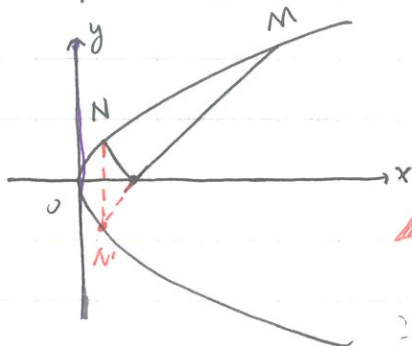
$$y_G = \frac{\frac{6y_1}{x_1 + 2} + \frac{6y_2}{x_2 + 2}}{2} = -3m \quad (\text{与 } x = my + 1 \text{ 代入化简})$$

$$G(4, -3m). \Rightarrow k_{FG} = -m. \quad \textcircled{1} \therefore k_{FG} \cdot k_{DE} = -1. \quad FG \perp DE \quad (k \text{ 存在})$$

垂直的两种表达关系: $\textcircled{1} k_1 \cdot k_2 = -1$; $\textcircled{2} x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ (向量)

(2) 抛物线 $y^2 = 4x$. $F(1, 0)$. MF, NF 倾斜角互补. $k_{MF} = k_1, k_{MN} = k_2$.

求 $k_1^2 - 4k_2^2$ min



设双变量. $M(x_1, y_1) \quad N(x_2, y_2)$

由显于性质

N 关于 x 对称点 $N'(x_2, -y_2)$ 在 MF 上

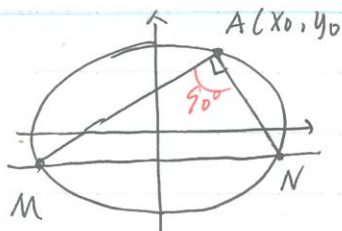
$\triangle x_1, y_1, x_2, y_2$ 关系转化到同一条直线上

Québec Montréal Canada

QMC

(3) 类型3. 过定点的两条相关联直线

证明 MN 恒过定点:



设 $M(x_1, y_1) \quad N(x_2, y_2) \quad MN: y = kx + b$

$\textcircled{2} \vec{AM} \cdot \vec{AN} = 0$. 获得 x_1, x_2, y_1, y_2 关系式

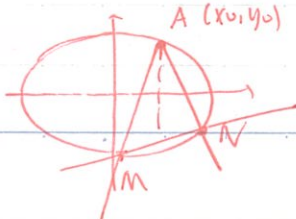
$\begin{cases} MN \\ C \text{ 椭圆} \end{cases}$ 联立. 韦达定理. 代入化简

$$k_{AM} = b k_{AN}, \quad a k_{AM} + b k_{AN} = c$$

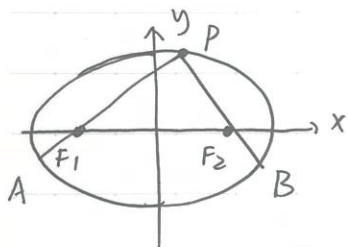
若 $k_{AM} = k_{AN}$, 也用该关系求 AAA $\rightarrow$ 参见后文非对称

设 MN 的方程. 从而联立两直线关系. 韦达定理的
处理

类比:



△(14) 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上有一点 P. 如图. 证明: $\frac{|PF_1|}{|FA|} + \frac{|PF_2|}{|FB|}$ 为定值.

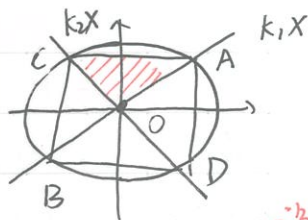


比例转化. $\frac{|PF_1|}{|FA|} \Leftrightarrow \frac{|y_P|}{|y_A|}$ $P(x_0, y_0)$ $k_{PA} = \frac{y_0}{x_0+1}$ $k_{PB} = \frac{y_0}{x_0-1}$

联立 $x = \frac{x_0 \pm 1}{y_0} x \mp 1$ ① $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ②

用 $\frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \lambda$. 再反表于用(半招)(纵)代入

△变量转化. 如图. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $k_1 + k_2 = -12$. 求 $S_{\text{四边形ABCD}} \max$



● $S_{\text{四边形ABCD}} = 4 S_{\text{四边形OAC}}$

设 $AC: y = kx + b$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立.

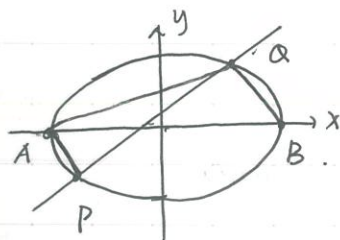
$x_A x_C = \frac{c}{a}$ $x_A + x_C = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{y_A}{x_A} + \frac{y_C}{x_C} = -12$.

设双变量通过该一直线将双变量联立成为单变量.

0 参数方程是否也可求解? 亟待探讨.

△非对称结构韦达定理

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, A, B 是左, 右顶点. $y = k(x-m)$ 交于 P, Q. $k_{AP} = 2k_{BQ}$. 则 $m =$



非对称结构的韦达定理式

m

联立 $\begin{cases} y = k(x-m) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2+3)x^2 - 8k^2mx + 4k^2m^2 - 12 = 0$

$A(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$

$x_1 + x_2 = \frac{8k^2m}{4k^2+3}$ $x_1 x_2 = \frac{4k^2m^2-12}{4k^2+3}$

$k_{AP} = 2k_{BQ} \Rightarrow \frac{y_1-0}{x_1+2} = \frac{2(y_2-0)}{x_2-2} \Rightarrow y_1(x_2-2) = 2y_2(x_1+2)$ ①

非对称韦达定理构造

原椭圆: $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}y^2 = (x+2)(2-x)$ 因式分解 ②

①②式联立消参: $2[x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4] + \frac{4}{3}y_1 y_2 = 0$

第三定义法: $k_{QA} \cdot k_{QB} = e^2 - 1 = -\frac{3}{4}$ (需证明)

$\therefore \frac{y_2}{x_2-2} \cdot \frac{y_2}{x_2+2} = -\frac{3}{4}$ ③

①③式联立: $\frac{y_1}{x_1+2} = -\frac{3(x_2+2)}{2y_2}$

$\Rightarrow -2y_1 y_2 = 3(x_1+2)(x_2+2)$

最终目标
化为对称
结构

(12分) 已知函数 $f(x) = ax - \frac{x + \ln x}{e^x} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若函数 $f(x)$ 只有 1 个零点, 求实数 a 的取值范围.

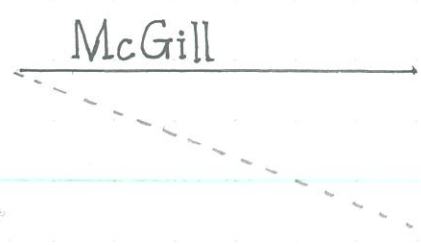
(12分) 已知函数 $f(x) = e^x - a(x-1) + 2 (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $x \in [a, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq 3$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

圆锥曲线 1. (继下页) 非对称韦达定理处理方法

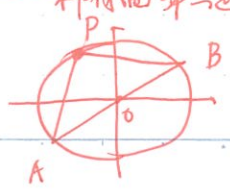
• 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 左, 右顶点为 A_1, A_2 . 直线 $l: x = my + n$ 交 C 于 A, B . 满足 $k_{BA_2} = 2k_{AA_1}$. 证明: l 过定点.

• 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A, B 为上, 下顶点. P, Q 是椭圆上异于 A, B 两点. $\frac{k_{QB}}{k_{PA}} = -2$.
证明: l 过定点.



Handwritten notes on the right side of the page, including some mathematical expressions and diagrams.

→ 椭圆第三定义证法: 在此不多赘述



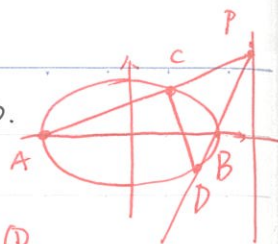
① 分解硬做

② 二次代换变为对称

③ 求点找线 ④ $k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1$

E: $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 左右顶点为 A, B. P 在 $x=6$ 上. PA 与 E 交于 C. PB 与 E 交于 D.

证明直线 CD 过定点. (2020 全国 I · 20)



$$\dots \Rightarrow C(x_1, y_1) D(x_2, y_2) \quad \frac{3y_1}{x_1+3} = \frac{y_2}{x_2-3} \Rightarrow 3y_1(x_2-3) = y_2(x_1+3) \quad ①$$

化为乘积式

① 令系数为 0 求未知数

$$②: (x_2+3)(x_2-3) = -9y_2^2 \text{ (椭圆)} \rightarrow \text{代入 } ① \quad 3y_1(-9y_2^2) = y_2(x_1+3)(x_2+3)$$

因式分解改号.

$$\Rightarrow -27y_1y_2 = (x_1+3)(x_2+3)$$

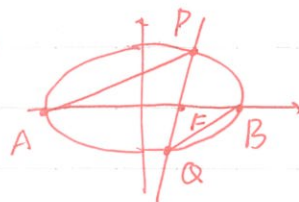
椭圆 E: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. A, B 为其左, 右顶点. 过右焦点直线与 E 交于 P, Q.

求证: AP, BQ 交点 T 在定直线上 $P(x_1, y_1) Q(x_2, y_2)$

$$AP: y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2) \quad BQ: y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$$

二者联立. $PQ: x = my + 1$

$$x = \frac{4my_1y_2 + 6y_2 - 2y_1}{y_1 + 3y_2} \quad ① \cdot ②$$



$$\text{韦达定理: } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4} \quad ① \\ y_1y_2 = -\frac{9}{3m^2+4} \quad ② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} \quad \frac{y_1+y_2}{y_1y_2} = \frac{2m}{3} \quad ③$$

韦达定理联立.

$$③ \cdot ② \text{ 式联立} \quad \frac{4y_1 + 12y_2}{y_1 + 3y_2} = 4$$

$$\text{法二: } \frac{y_1}{x_1+2}(x+2) = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$$

BP

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = \frac{y_2(x_1+2)}{(x_2-2)y_1} = \frac{y_2(x_1+2)(x_2+2)}{y_1(x_2-2)(x_2+2)} = \frac{y_2(x_1+2)(x_2+2)}{y_1(-\frac{4}{3}y_2^2)} = \dots$$

代入椭圆

验证 x 定.

则 $\frac{x+2}{x-2}$ 为定

从椭圆方程中找关系

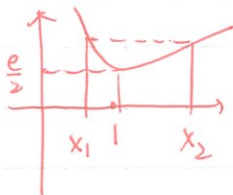
$$\frac{x+2}{x-2} = 3 \quad x=4$$

最后一步验证

极值点偏移 函数值关系的处理方法

① $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2$. $f(x_1) + f(x_2) = e$, $x_1 < x_2$. 证明: $x_1 + x_2 < 2$

代换. ① 大致图像 设 $0 < x_1 < 1 < x_2$.



证 $x_1 + x_2 < 2 \Rightarrow x_2 < 2 - x_1 \Rightarrow f(2 - x_1) > f(x_2)$

原函数值 $f(x_1) + f(x_2) = e$ 代换

$f(2 - x_1) > e - f(x_1)$

其本度和 $f(x_1) = f(x_2)$ 不变.

$x_1 \in (0, 1)$. 研究函数不等式

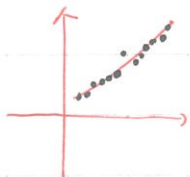
② $f(x) = x^2 - m(\ln x)^2$. $m=1$, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_1) + f(x_2) = 2$. 证明: $x_1 + x_2 > 2$

代换. 大致图像: $f(x) = x^2 - (\ln x)^2$

$x_1 + x_2 > 2 \Rightarrow x_1 > 2 - x_2$

判单调性, 其在 $(0, +\infty)$ 上恒 $\uparrow$

$f(x_1) > f(2 - x_2)$



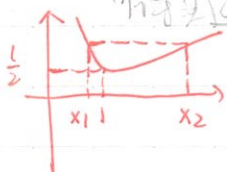
切点.

$\Rightarrow 2 - f(x_2) > f(2 - x_2)$. $x_2 \in (0, 2)$.

③ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$. $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$. 证明: $x_1 + x_2 > 2$

① 大致图像:

天



可得其过点 (1, 1/2)

设 $0 < x_1 < 1 < x_2$. $x_1 + x_2 > 2 \Rightarrow x_1 > 2 - x_2$

$\therefore f(x_1) < f(2 - x_2)$

$\Rightarrow f(x_2) < f(2 - x_2)$

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 上、下顶点分别为 B_1, B_2 , 直线 l 经过点 $D(0, \frac{b}{2})$ 且与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 当 $\overrightarrow{B_1P} + \overrightarrow{B_1Q} = 2\overrightarrow{B_1D}$ 时, 四边形 B_1PB_2Q 的面积为 $6\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 若直线 B_1P, B_2Q 交于点 N , 试判断点 N 是否在定直线上, 若是, 求出该直线方程; 若不是, 请说明理由.



$C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$

有 $\frac{y+2}{y-2} = \frac{kx_1x_2 + 3x_1}{kx_1x_2 - x_2}$

$\Rightarrow y = \frac{\frac{2x_1}{kx_1-1} + \frac{2x_2}{kx_2+3}}{\frac{x_1}{kx_1-1} - \frac{x_2}{kx_2+3}} = 4$

代或只
有y形
式代简

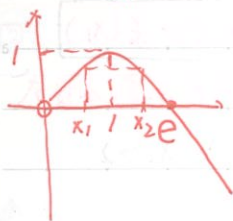
函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$

2021 新高考 I 22

✓ 设 a, b 为两个不相等的正数. $b \ln a - a \ln b = a - b$. 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$

关系式转化为 $\frac{1}{a}(1 - \ln \frac{1}{a}) = \frac{1}{b}(1 - \ln \frac{1}{b})$ 化成与原函数相关联的式子

令 $x_1 = \frac{1}{a}$ $x_2 = \frac{1}{b}$ 极值点偏移, 分两次证明.



$$\text{令 } f(x_1) = f(x_2) \quad 0 < x_1 < 1 < x_2 < e$$

$$x_1 + x_2 > 2 \Rightarrow x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(2 - x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(2 - x_2) \quad x_2 \in (1, e) \text{ 范围}$$

$$x_1 + x_2 < e \Rightarrow x_1 < e - x_2 \Rightarrow$$

变量转化

$$(\text{对称构造}) \Rightarrow x_2 < e - x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(e - x_1) \Rightarrow \underline{f(x_1) > f(e - x_1)}$$

✓ 设 x_1, x_2 是 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 的两个零点. (2016 全国 I · 21)

(i) 求 a 的范围.

(ii) 证明: $x_1 + x_2 < 2$

$$\text{① } a \geq 0 \text{ 分类讨论. } f'(x) = (x-1)(e^x + 2a) \quad \begin{cases} \text{① } a \geq 0 \\ \text{② } a < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 > a > -\frac{e}{2} \\ a = -\frac{e}{2} \\ a < -\frac{e}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{画图} \\ \text{分析单调性} \end{matrix}$$

$$\text{② 结合①单调性 } x_1 < 1 < x_2. \quad x_1 + x_2 < 2 \Rightarrow x_1 < 2 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(2 - x_2) \quad x_2 > 1 \\ \Rightarrow f(x_2) > f(2 - x_2)$$



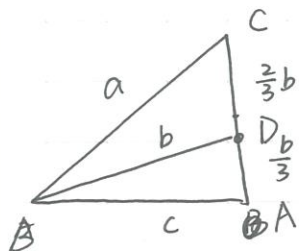
• $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1$ 有两个零点 x_1, x_2 . 证明: $x_1 x_2 < \frac{1}{e^4}$ (2022 · 45 套 22)

对称构造 / 比值构造

• $f(x) = \ln x - ax + 1$, 当 $a=1$ 时 $f(x)$ 与 $y=kx+m$ 交于 $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$. $x_1 < x_2$.

$$\text{证明: } \frac{1}{x_2} < k+1 < \frac{1}{x_1}$$

5. $\triangle ABC$ 中, $b^2 = ac$. D 在 AC 上, $AD = 2DC$, $BD = b$, 求 $\cos \angle ABC$. (2021 新高考 I 19)



$\Rightarrow \frac{11}{3}b^2 = c^2 + 2a^2$ 没问题 ($\triangle BDC, \triangle ABD$ 同余弦定理消角)

$$3c^2 - 11ac + 6a^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (c-3a)(3c-2a) = 0 \dots \text{因式分解} \star \star$$

$$c = 3a, c = \frac{2}{3}a.$$

$c = 3a$ 舍去. (不构成 $\triangle$). $c = \frac{2}{3}a, \Rightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{3}a, a = a.$

利用余弦定理, $\cos \angle ABC = \frac{7}{12}.$

(2021 全国甲 10)

把 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 ____.

1, 1, 1, 1, 0, 0

$\rightarrow$ 4 个 1 一样, 定 0 的顺序即定总排列数, 有 C_6^2 种.

1, 1, 1, 1,
 个 个 个 个 个

针对 2 个 0 插空, 有 C_5^2 种

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^2} = \frac{2}{3}$$

(2021 全国乙 6)

5 人去 4 个不同的项目当志愿者, 每个项目都需要有人, 共有 ____ 种分配方法

1, 1, 1, 2

$$C_5^2 \cdot A_4^4$$

$$= 240$$

个 (种类)

确定 2 个人的数

篮球投篮时命中概率为 $\frac{2}{5}$, 投第 4 次之后恰好命中 2 次概率为 $\frac{108}{625}$

— — — 必中
1 2 3 4

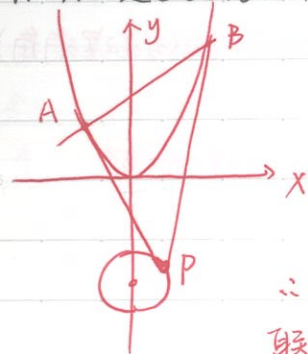
$$C_3^1 \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5}$$

第 4 次概率仍要算在内
又不过顺序已知.

圆锥曲线切线专题

• 抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点为 F . P 在圆 $M: (x-4)^2 + y^2 = 1$ 上. $x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上.

PA, PB 是 C 的两条切线. 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值. (2021 全国 I. 21)



点 $A(x_1, y_1)$ 处切线斜率: $k = \frac{1}{2}x_1$

A 在直线 $x_1x - 2y_1 - 2y = 0$ 上

点 $B(x_2, y_2)$ 处切线斜率 $k = \frac{1}{2}x_2$

B 在直线 $x_2x - 2y_2 - 2y = 0$ 上

$$\therefore AB: x_0x - 2y - 2y_0 = 0$$

$$\text{联立} \begin{cases} x_0x - 2y - 2y_0 = 0 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x_0x + 4y_0 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2x_0 \quad x_1x_2 = 4y_0$$

$$S = \frac{1}{2}|AB| \times d = \frac{1}{2}(x_0^2 - 4y_0)^{\frac{3}{2}}, \quad x_0^2 = 1 - (y_0 + 4)^2 \quad S = \frac{1}{2}[21 - (y_0 + 6)^2]^{\frac{3}{2}}$$

$$y_0 \in [-5, -3] \quad S_{\max} = 20\sqrt{5}$$

• 抛物线: $y^2 = x$, $\odot M: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 圆心为 M . 设 A_1, A_2, A_3 是抛物线上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系. (2021 全国 II 20)

• 曲线 $C: x^2 = 2y$. D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点. 过 D 作 C 的两条切线. 切点为 A, B .

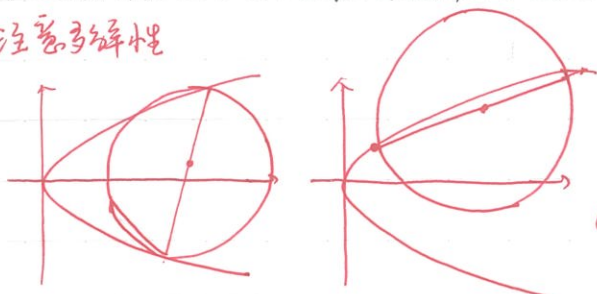
(1) 证明: 直线 AB 过定点 (2019 全国 III 21)

(2) 以 $E(0, \frac{5}{2})$ 为圆心的圆与 AB 相切, 且切点为 AB 中点. 求四边形 $ADBE$ 面积

(1) 设 $D(m, -\frac{1}{2})$ $DA: y + \frac{1}{2} = k(x - x_A)$ DA 代入抛物线 整理化简. 过 $(0, \frac{1}{2})$

- 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 焦点为 F . 过 F 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线与 C 交于 A, B . $|AB| = 8$
求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程. (2018 课标 II · 19)

注意多解性



大致存在图示两种状况 $K_{AB} = 1$

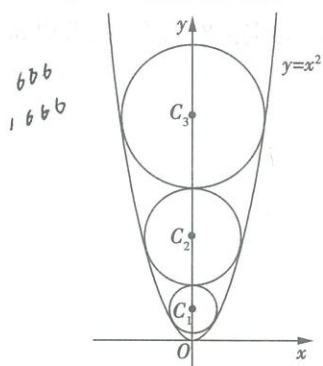
AB 中点坐标: $(3, 2)$ 圆心在 AB 垂直平分线上

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16, \quad (x-11)^2 + (y+6)^2 = 144.$$

两光滑的曲线相切, 那么它们在公共点处的切线相同. 如

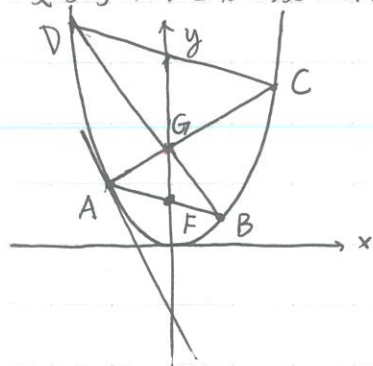
图所示, 一列圆 $C_n: x^2 + (y - a_n)^2 = r_n^2$ ($a_n > 0, r_n > 0, n = 1, 2, \dots$) 逐个外切, 且均与曲线 $y = x^2$ 相切, 若 $r_1 = 1$, 则

$$a_1 = \underline{\hspace{2cm}}, r_n = \underline{\hspace{2cm}}.$$



$$2e^3 \ln 4$$

- 抛物线 $E: x^2 = 4y$ 焦点为 F . 过 F 直线与 E 交于 A, B . 过 A 作垂直于 A 点切线的直线与 y 轴, E 分别交于 G, C . 记 BG 与 E 交于 D . 求 $\frac{S_{\triangle CGD}}{S_{\triangle AGB}}$ 的范围.



已知点 P 是抛物线 $C: x^2 = 4(y+3)$ 的顶点, 过点 $(0, -1)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心.

(1) 试问: 直线 l 与点 M 的轨迹是否有交点? 若有, 请求出交点坐标; 若没有, 请说明理由.

(2) 若点 M 的轨迹上存在不关于 y 轴对称的两点 G, H , 使直线 PG 与直线 PH 关于 y 轴对称, 求证: 直线 GH 必过定点.

多面体中取棱问题

⑬ 阿基米德多面体 (Archimedean polyhedra) 是由两种或三种正多边形面组成的半正多面体, 它共有 13 种, 其特点是棱长相等. 如图 1, 顺次连接棱长为 2 的正方体各棱的中点, 得到一个阿基米德多面体, 如图 2, 在此阿基米德多面体的所有棱中任取两条, 则两条棱垂直的概率为 $\frac{2}{23}$.

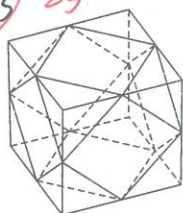


图 1



图 2

定 $\times 4$ 种 = 16 (一面)

16 $\times$ 3 = 48 (全)

$\frac{2 \times 8 \times 3}{3 \times 4 \times 23}$

定一变一.

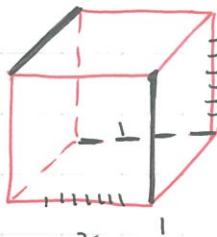
顶边棱确定 4 种, 共 8 种.

各条棱均定 16

3 组对面: ~~24 种~~ 16 $\times$ 3 = 48 种

$$P = \frac{48}{C_{24}^2} = \frac{4}{23}$$

• 正方体中任选 3 条棱, 这三条棱两两异面的概率为 $\frac{2}{15}$.



定一变二

顶边棱确定, 对应 2 种. 4 条棱 $\rightarrow$ 8 种

$$P = \frac{8}{C_{12}^3} = \frac{2}{55}$$



类似此类题, “重复”的应记在内.

根系统压轴

(12分) 核酸检测是诊断新冠肺炎的重要依据, 首先取病人的唾液或咽拭子的样本, 再提取唾液或咽拭子样本里的遗传物质, 如果有病毒, 样本检测会呈现阳性, 否则为阴性. 多个样本检测时, 既可以逐个化验, 也可以将若干个样本混合在一起化验, 混合样本中只要有病毒, 则混合样本化验结果就会呈阳性, 若混合样本呈阳性, 则将该组中各个样本再逐个化验; 若混合样本呈阴性, 则该组各个样本均为阴性. 根据统计发现, 疑似病例核酸检测呈阳性的概率为 p ($0 < p < 1$). 现有 4 例疑似病例, 对其核酸检测有以下三种方案: 方案一, 逐个化验; 方案二, 4 个样本混在一起化验; 方案三, 平均分成两组化验.



(1) 若 $p = \frac{1}{4}$, 求 2 个疑似病例的混合样本化验结果为阳性的概率.

(2) 在新冠肺炎爆发初期, 由于检查能力不足, 化验次数的期望值越小, 则方案越“优”. 若 $p = \frac{1}{4}$, 现将该 4 例疑似病例样本进行化验, 请问: 方案一、二中哪个更“优”?

(3) 若 $p = \frac{1}{2}$, 求方案三化验次数的分布列.

$$(1) P = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times C_2^1 = \frac{7}{16}$$

(2) 设化验次数为 X , $X = 1, 5$ ★

$$P(X=1) = \frac{81}{256}$$

$$P(X=5) = \frac{175}{256}$$

$$E(X) = \frac{239}{64} < 4. \text{ 方案二优}$$

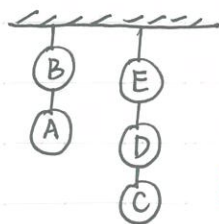
(3) 对每组而言, 阴性 $X=1$

阳性 $X=3$

$$\therefore Y = 2, 4, 6$$

Y	2	4	6
P(Y)	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$

• 甲乙丙丁戊分别取 ABCDE 五个袋子. 一人一次取一个, 两边均有袋子时取哪一边的概率均等. ABCDE 中分别有 100, 80, 120, 200, 90 元奖券. 且一人一次只能拿每一边最下面一个. 丁第 4 个拿, 求其所得钱数 X 分布列和 $E(X)$



枚举? 穷举法列表

X	80	90	100	200
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = \frac{1155}{8}$$

误区! m 人中取 n 个就一定 C_m^n ?

• 有 8 人在参加培训. 1 人在 A, 3 人在 B, 4 人在 C.

从中抽调 3 人到 D, 要求 3 人中来自 A 和 B 的人数都不超过来自 C 的人数.

设来自 C 的人数为 ξ , 求其分布列及 $E(\xi)$ 注意: 所加限制之后总次数不再是 C_8^3

$\xi = 1, 2, 3$

$\xi = 1$: ABC 各一人. 有 $1 \times C_3^1 \times C_4^1 = 12$ (种)

$$P(\xi = 1) = \frac{12}{40}$$

$\xi = 2$: C 2 个, A, B 一人. 有 $C_4^2 \times C_4^1 = 24$ (种)

$$P(\xi = 2) = \frac{24}{40}$$

$\xi = 3$: C 3 个. 共 $C_4^3 = 4$ (种)

$$P(\xi = 3) = \frac{4}{40} \quad E(x) = \frac{9}{5}$$

19 (12 分) 某公司年会有幸运抽奖环节, 一个箱子里有相同的

十个乒乓球, 球上分别标 0, 1, 2, ..., 9 这十个自然数, 每位

员工有放回依次取出三个球. 规定: 每次取出的球所标

数字不小于后面取出的球所标数字即中奖. 中奖项: 三个

数字全部相同中一等奖, 奖励 10 000 元现金; 三个数字中

有两个数字相同中二等奖, 奖励 5 000 元现金; 三个数字

各不相同中三等奖, 奖励 2 000 元现金. 其他不中奖, 没有

奖金.

(1) 求员工 A 中二等奖的概率;

(2) 设员工 A 中奖奖金为 X , 求 X 的分布列; 2

(3) 员工 B 是优秀员工, 有两次抽奖机会, 求员工 B 中奖奖金的期望.

所加限制的条件?

中二等奖: ① 前 2 次取同一数字

前 2 次大, 后 1 次小 $C_{10}^2 = 45$

② 后 2 次取同一数字 $C_{10}^2 = 45$

二等奖一共 90 种可能 $P = \frac{9}{100}$

三等奖

$$P(X=2000) = \frac{C_{10}^3}{10^3} = 0.12$$

定序问题只按选数就可以了!

二等奖: $n_1 = n_2 > n_3$ C_{10}^2

$n_1 > n_3 = n_2$ C_{10}^2

任选 2 个, 为达目的其顺序

自动排成

三等奖: C_{10}^3

任选 3 个, 为达目的其顺序

自动排成

(与排列无关)

导数 3 导数与三角

$\triangle f(x) = \sin^2 x \cdot \sin 2x$ (2020 课标 II · 21)

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 单调性 $\checkmark$

(2) 证明: $|f(x)| \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$ $\checkmark$

(3) $n \in \mathbb{N}^*$. 证明: $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}$

$\checkmark f(x) = \sin x - \ln(1+x)$. 证明: (2019 课标 I · 20)

(1) $f'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 内存在唯一极大值点

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点. (画图. 判 $f'(x)$ 变化趋势)

① $f'(x) = g(x)$ $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \cos x$ $x \in (-1, 0]$. $g'(x) > 0$ $g(x)$ 单增

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 存在 x_0 . $g'(x_0) = 0$ $g(x)$ 在 $(-1, x_0)$ $\uparrow$ 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ $\downarrow$

$g(-1) = \cos(-1) > 0$ $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$ $\therefore g'(-1) = -\sin(-1) > 0$ $g'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2} - 1 < 0$ $\therefore$ 导数

② 分段讨论. 且 $f(0) = 0$. i) $x \in (-1, 0)$ ii) $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ iii) $x > \frac{\pi}{2}$.

$\bullet f(x) = e^x \cos x$. (2019 天津 · 20)

(1) 求 $f(x)$ 单调区间

(2) $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. 证明 $f(x) + f'(x)(\frac{\pi}{2} - x) \geq 0$

(3) 设 x_n 为函数 $f(x) - 1$ 在 $(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2})$ 内的零点. $n \in \mathbb{N}$

证明: $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$

• $f(x) = e^x \cos x - x$ (2017 北京 19)

求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调 ↓

• $f(x) = x^2 + 2\cos x$, $g(x) = e^x (\cos x - \sin x + 2x - 2)$ (2017 山东 20)

令 $h(x) = g(x) - af(x)$. 讨论 $g(x)$ 单调性并判断有无极值.

• $f(x) = a \cos 2x + (a-1)(\cos x + 1)$, $a > 0$ 记 $|f(x)|_{\max} = A$ (2016 课标 III 21)

(1) 求 A (2) 证明 $|f'(x)| \leq 2A$

• 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$, $a \leq 1$ 时, 证明: $e^x + \cos x - ax - 2 < 0$ (放缩+分段)

法1 $e^x \geq x+1+\frac{1}{2}x^2$ $\cos x \geq 1-\frac{1}{2}x^2$

泰勒 $\therefore$ 原式化为 $x+1+\frac{1}{2}x^2+1-\frac{1}{2}x^2-ax-2 < 0$

$(1-a)x < 0$ 又 $x < 0$

故 $1-a \geq 0$ $a \leq 1$ 得证

法2 必要条件的充分性法

法3 分离各自求值 $e^x - ax < \cos x - 2$ $e^x - ax < 1$ 多 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$

法4 传统分类讨论

注意: 必要条件的充分性法, 泰勒展开, 洛必达法则 率度上一样.

Campus

一者失败其余均失败!!!

△ $f(x) = e^x - \cos x - ax$. 当 $x > 0$ 时, 证明: $xe^x > \sin^2 x + 2\sin x - \sin x \cos x$ 分段放缩

$x > \sin x$ $e^x > x + 1 - \frac{1}{2}x^2$ } $\Rightarrow$ 三步泰勒展开 $x \geq 0$ 得证
 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

• 当 $x \in (0, \pi]$, $a \in [0, 1]$ 时, 证明: $\sin ax - a \sin x \geq 0$

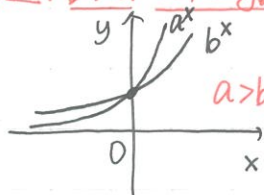
$\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \pi]$ $\downarrow$ $a=0, 1$ 原式 $= 0$ 成立

$\frac{\sin ax}{ax} > \frac{\sin x}{x}$ $0 \leq ax \leq x \leq \pi$ 原不等式证毕. QED

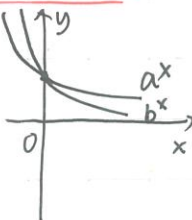
▲ 若 $\log_a^2 > \log_b^2 > 1$. 则

A. $1 < a < 2 < b$ B. $1 < a < b < 2$ C. $1 < b < a < 2$ D. $a < 1 < b < 2$

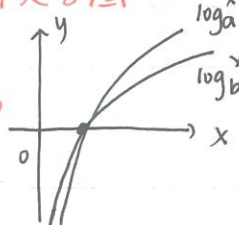
由题. $b > a$ $a > 1$ $\log_b b > 1$ $\therefore b < 2$ 指, 对数关系图像.



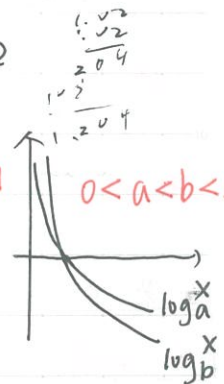
$a > b > 1$



$1 > a > b > 0$



$b > a > 1$



$0 < a < b < 1$

泰勒展开式☆☆:

一般地, $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$ 余项

• $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$

• $\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$

• $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$

• $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$

• $e^x > x + \frac{1}{2}x^2 + 1$ 常用

• $\ln(x+1) > x - \frac{1}{2}x^2$ 泰勒

• $\sin x > x$ 放缩

• $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ 式

切线放缩: $(\Delta \frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x \leq e^{x-1})$ 连续恒等式

• $e^x \geq x+1$ ($x=0$ 取 "=")

• $e^x \geq ex$ ($x=1$ 取 "=")

• $\ln x \leq x-1$ ($x=1$ 取 "=")

• $\ln x \leq \frac{1}{e}x$ ($x=e$ 取 "=")

• $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ ($x=1$ 取 "=")

• $\ln x \leq x^2 - x$ ($x=1$ 取 "=")

比较 $\ln 1.02$ 和 $\sqrt{1.04} - 1$:

$\ln 1.02 \geq 0.02 - \frac{1}{2} \times (0.02)^2 = 0.01998$

0.01998 和 $\sqrt{1.04} - 1 \Rightarrow$

1.01998 和 $\sqrt{1.04} \Rightarrow (1.01998)^2$ 和 1.04

• $e^x \geq ex + (x-1)^2$

$1.0403592 \approx (1.01998)^2 > 1.04$ KOKUYO

导数 4 同构 (指对互化 + 同构)

讨论 $f(x) = \frac{x}{e^x} + a(\ln x - x)$ 的零点个数, 并讨论其极值点个数.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{e^x} + a(\ln x - \ln e^x) \quad f(x) = \frac{x}{e^x} + a \frac{\ln x}{\ln e^x}$$

极值点: ① $a \geq 0, a \leq -\frac{1}{e}$ 1个极值点 / $-\frac{1}{e} < a < 0$ 3个极值点.

讨论 $f(x) = e^{x-a} - \frac{\ln x}{x} - 1$ 的零点个数

$$e^{x-a} = \frac{\ln x}{x} + 1 \text{ 零点个数} \Rightarrow \frac{1}{e^a}(xe^x) = \ln(xe^x)$$

$$\frac{1}{e^a} xe^x = \ln x + x \rightarrow$$

$x > 1$ 时, $\frac{e^x}{x-3\ln x+1} \geq ax^3$ 恒成立. 求 a 的取值范围.

$$a \leq \frac{e^x}{x^3(x-3\ln x+1)} = e^{x-\ln x^3} \cdot \frac{1}{x-3\ln x+1} = e^{x-\ln x^3} \cdot \frac{1}{x-\ln x^3+1}$$

$$\text{由 } e^{x-\ln x^3} \geq x-\ln x^3+1 \quad \therefore a \leq 1 \quad (e^x \geq x+1)$$

若 $xe^x + x - \ln x - bx - 1 \geq 0$ 成立, b 的取值范围是 ____.

$$x = \ln e^x = e^{\ln x} \Rightarrow e^{\ln x} \cdot e^x - (\ln x + x) - 1 \geq (b-2)x$$

$$\text{常见代换式} \Rightarrow e^{\ln x + x} - (\ln x + x) - 1 \geq (b-2)x$$

$$e^t - t - 1 \geq (b-2)x \quad b \in [2, +\infty)$$

$$b-2 \leq 0 \Rightarrow b \leq 2$$

常见同构式

$$\textcircled{1} x = \ln e^x = e^{\ln x} \quad \textcircled{2} xe^x = e^{\ln x + x} \quad \textcircled{3} \frac{x}{\ln x} = -\ln \frac{1}{x} e^{\ln \frac{1}{x}}$$

朗博同构:

$$xe^x + \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \Delta \quad -\frac{\ln x}{x} = e^{\ln \frac{1}{x}} \cdot \ln \frac{1}{x}$$

不是相加等于0! 而是一种单调性分析.

$$-\frac{\ln x}{x} = e^{\ln \frac{1}{x}} \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^x x \text{ 同构}$$

例如 $x + \ln x + xe^x / x - \ln x + \frac{e^x}{x}$ 皆可尝试进行同构.

$a > 0$ 时, $x \in (1, e^2)$ $e^x - x \geq x^a - a \ln x$. $a_{\max} =$ ____.

$$\text{Campus } x^a - a \ln x = x^a - \ln x^a = e^{\ln x^a} - \ln x^a$$

$$a = 2\sqrt{e}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{e^2}{4 - \ln 4}$$

$$\text{构造: } a = \frac{\sqrt{e}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{\ln \sqrt{e}} \quad c = \frac{\frac{e^2}{2}}{2 - \frac{\ln 4}{2}} = \frac{\frac{e^2}{2}}{\ln^2 - \ln 2} = \frac{\frac{e^2}{2}}{\ln \frac{e^2}{2}}$$

导数5 比大小

与b构造相似结构

• 设 $2^x = 3^y = 5^z$. 则 $2x, 3y, 5z$ 大小关系为 _____. (2017 课标 I · 11 改)

$$2^x = 3^y = 5^z = k \Rightarrow \text{取对} \quad x \ln 2 = y \ln 3 = z \ln 5 = \ln k \Rightarrow x = \frac{\ln k}{\ln 2}, y = \frac{\ln k}{\ln 3}, z = \frac{\ln k}{\ln 5}$$

$$2x = \frac{2}{\ln 2} \cdot \ln k, 3y = \frac{3}{\ln 3} \cdot \ln k, 5z = \frac{5}{\ln 5} \cdot \ln k \quad \text{令 } f(x) = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow 5z > 2x > 3y$$

• 若 $e < a < b < \pi$. 则 $a^b, b^a, \log_b^a$ 的大小关系为 _____.

$$a^b \sim b^a \Leftrightarrow b \ln a \sim a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \sim \frac{\ln b}{b} \quad \text{结合对数函数, } \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \quad a^b > b^a$$

$$a^b > 1, b^a > 1, \log_b^a < 1 \quad \therefore a^b > b^a > \log_b^a \quad (\text{别想多了})$$

• 设 $a = \log_{0.2}^{0.3}, b = \log_2^{0.3}$. 则 $a+b, ab, 0$ 的大小关系为 _____ (2018 课标 III · 12 改)

• $a < 5, ae^5 = 5e^a; b < 4, be^4 = 4e^b; c < 3, ce^3 = 3e^c$. 则 a, b, c 大小关系为 _____ (2021 八省联考)

$$\Rightarrow 5 \ln ae = a \ln 5e \quad \frac{\ln ae}{a} = \frac{\ln 5e}{5} \quad f(x) = \frac{\ln x + 1}{x} \quad [c > b > a]$$

• 设 $a = 2 \ln 1.01, b = \ln 1.02, c = \sqrt{1.04} - 1$. 则 a, b, c 大小关系为 _____ (2021 全国乙 · 12)

① 构造函数. ② 泰勒展开式近似

• $a = \sqrt{6} \ln \pi, b = \sqrt{2} \pi \ln 3, c = \sqrt{3} \pi \ln 2$. 则 a, b, c 大小关系为 _____

$$\star \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$$

$$\frac{a}{\sqrt{6}\pi} = \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{2 \ln \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{b}{\sqrt{6}\pi} = \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} = \frac{2 \ln 3}{\sqrt{3}} \quad \frac{c}{\sqrt{6}\pi} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \ln 2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore c < b < a$$

导数6. 不等式求解与证明

若 $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x \leq ax^2 - \frac{1}{2}x^3$ 对 $x \geq 0$ 成立. 求 a 的范围. 必要求导求极值点.

$$\text{证明: } \ln x + x < e^x + \frac{1}{2e}$$

$$\text{方法: } f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$$

???

五个基本同构式

$$ax e^{ax} \geq x \ln x \Rightarrow ax e^{ax} \geq \ln x \cdot e^{\ln x}$$

$$x^2 \ln x = a \ln a - a \ln x \Rightarrow x \ln x = \frac{a}{x} \ln \frac{a}{x}$$

$$\frac{e^x}{a} + 1 > e \ln(ax - a) \quad a > 0 \Rightarrow \frac{e^x}{a} + \ln \frac{e^x}{a} > \ln(x-1) + (x-1)$$

$$x + \frac{1}{e^x} \geq x^a - \ln x^a \Rightarrow \frac{1}{e^x} - \ln \frac{1}{e^x} \geq x^a - \ln x^a$$

$$x^{a+1} e^x \geq -a \ln x \Rightarrow x e^x \geq -a \ln x \cdot e^{-a \ln x}$$

$$\frac{\ln x}{x} + 1 < \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2e} \quad \text{凹凸反转.}$$

$$\max \quad \frac{1}{e} + 1 < \min \quad e + \frac{1}{2e}$$

$$x = e \text{ 极大值}$$

$$x = 1 \text{ 极小值.}$$

导数：1 隐零点处理.

• 证明: $2(\ln x - 2x + 1) - e^x < 2\ln 2 - 2 - 4x$

即证 $2\ln x - e^x < 2\ln 2 - 4$ $f(x) = 2\ln x - e^x$ $f'(x) = \frac{2}{x} - e^x$

$f(1) = 2 - e < 0$ ① $f(\frac{1}{2}) = 4 - \sqrt{e} > 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 存在 x_0 ② $\frac{2}{x_0} = e^{x_0}$

此时 $f(x_0)$ 是极大值 ③

$f(x_0) = 2\ln x_0 - e^{x_0} = 2\ln x_0 - \frac{2}{x_0}$ ④ $\leftarrow$ 变量代换 $x_0 = t \in (\frac{1}{2}, 1)$ 得证

$f'(t) = \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} > 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 增. $f'(t)_{\max} = 2\ln 1 - 2 = -2 < 2\ln 2 - 4$

• $xe^x + x - \ln x - bx - 1 \geq 0$ 成立. b 的范围是

$f(x) = \frac{xe^x + x - \ln x - 1}{x}$ $f'(x) = \frac{e^x x^2 + \ln x}{x^2}$

$f(1) = e > 0$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{e} - \ln 2}{\frac{1}{4}} < 0$ ①

在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 存在 x_0 . $e^{x_0} x_0^2 + \ln x_0 = 0$ $f(x_0)$ 是极小值 ②

$f(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} + x_0 - \ln x_0 - 1}{x_0} = \frac{x_0 e^{x_0} + x_0 + e^{x_0} x_0^2 - 1}{x_0}$ ④ 变量代换
再代换

题法: ① 判隐零点区间 $e^{x_0} x_0^2 + \ln x_0 = 0$

② 得变量关系 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}}$ (同构式)

③ 判大小 又 xe^x 在 $(0, +\infty)$ 增 $\therefore x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$ $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$

④ 代回原式 $f(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - 1 + x_0}{x_0} = \frac{1 + x_0 - 1 + x_0}{x_0} = 2$ $b \leq 2$
得新方程.

然后求解.

• 朗博同构. $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0}$ 不是相仿, 而指同构下的取仿

△ 绝对值不等式解法

- 若 $|2x-1| + |a-x| \leq 3-4x$ 解集为 $(-\infty, -2]$, 求 a

技巧于 $-(2x-1) + |a-x| \leq 3-4x$ 由范围去绝对值号

$$\Rightarrow |a-x| \leq 2-2x \quad \text{画图像.}$$

- 若 $|x-a| + |x+3| > -a$, 求 a 的取值范围 (2021 课标·乙·23)

全分类界点: ① $x=a$ ② $x=-3$

$a > -3$ 在 $x \in (-3, a)$, $f(x)_{\min} = a-x+x+3 > -a \quad a > -\frac{3}{2}$

$a < -3$ 在 $x \in (a, -3)$ $f(x)_{\min} = x-a-x-3 > -a$ 不成立.

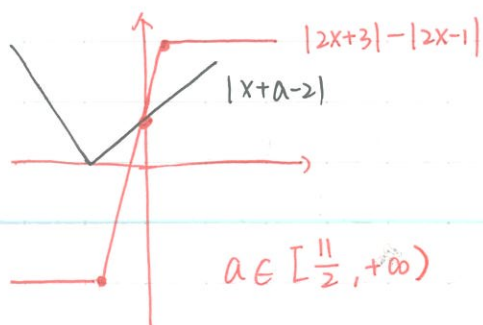
$\therefore a \in (-\frac{3}{2}, +\infty)$ | ② 绝对值三角不等式 $|x-a| + |x+3| \geq |a+3|$, $|a+3| > -a$ 解.

- $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$. 求 $f(x) > f(x+1)$ 的解集 (2020·全国I·23)

作图像 $\rightarrow$ (向左平移一个单位). 作比较

- $|x+a-2| \geq |2x+3| - |2x-1|$, 求 a 的取值范围. (2021 课标·甲·23)

作图像



TIPS 解决绝对值不等式的技巧

① 在 x 有限定范围时尝试消去绝对值符号.

② 作图像找范围和最值.

③ 运用绝对值三角不等式 (注意条件)

④ 了解不等式的常见证明方法.

- $|x-a^2| + |x-2a+1| \geq 4$. 求 a 的取值范围. (2020 全国II·23)

绝对值三角不等式 $|x-a^2| + |x-2a+1| \geq |x-2a+1-x+a^2| = (a-1)^2$

$\therefore (a-1)^2 \geq 4$. a 范围 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

• $x \in (0, 1)$ 时 $|x+1| - |ax-1| > x$ 成立, 求 a 的取值范围. (2018 全国 I·23)

等价于 $|ax-1| \leq 1$ (由范围去符号). $a \in (0, 2]$

• $5 - |x+a| - |x-2| \leq 1$. 求 a 的取值范围. (2018 全国 II·23)

① $|x+a| + |x-2| \geq 4 \Rightarrow |x+a| + |x-2| \geq |a+2|$ (绝对值三角不等式, $x=2$ 成立)

$|a+2| \geq 4$ ② 以 $-a, 2$ 为界点分类讨论. $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$

• $x \in [0, +\infty)$ 时, $|2x+1| + |x-1| \leq ax+b$. 求 $a+b$ 最小值 (2018 全国 III·23)

画图像. 数形结合. $(a+b)_{\min} = 5$

• $-x^2 + ax + 4 \geq |x+1| + |x-1|$ 的解集包含 $[-1, 1]$. 求 a 的取值范围 (2017 全国 I·23)

画图像. 数形结合. $a \in [-1, 1]$

• $|x+1| - |x-2| \geq x^2 - x + m$ 有解, 求 m 范围. (2017 全国 III·23)

画图像. 数形结合.

• 求 $||x+1| - |2x-3|| > 1$ 的解集. (2016 全国 I·24)

画图像. 或看范围.

• $|x-\frac{1}{2}| + |x+\frac{1}{2}| < 2$ 解集为 M , 当 $a, b \in M$ 时, 证明: $|a+b| < |1+ab|$

$M: (-1, 1)$

(2016 全国 II·24)

$(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2 + b^2 - a^2b^2 - 1 = (a^2-1)(1-b^2) < 0$ 原不等式得证. 同时平方

• $|2x-a| + |2x-1| + a \geq 3$. 求 a 的取值范围. (2016 全国 III·24)

绝对值三角不等式. $|2x-a| + |2x-1| \geq |a-1| \geq 3-a$ $a \geq 2$

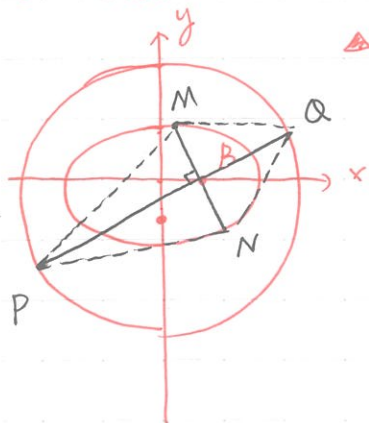
当且仅当 " $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立"

• $x \in \mathbb{R}$, $|x^2-2a| - 2|ax^2+a| \leq 0$. 求 a 范围. $x^2 = t$ 整体换元. (平方) $a \geq 0$

圆锥曲线3. 最值, 范围.

- 椭圆: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 圆: $(x+1)^2 + y^2 = 16$. 点 $B(1,0)$. 直线 l 过 B 与 l 垂直的直线与圆交于 P, Q . 求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围. (2016 全国 I · 20)

$[12, 8\sqrt{3})$



注意讨论斜率不存在的情况 (此时 S 取 $\max$)

$$S_{\text{四边形} MPNQ} = \frac{1}{2} |PO| \cdot |MN|$$

TIPS: 把 MN 设为 $x = my + 1$ (与复杂方程联立的式子简化)

- 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$. 椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. C_2 右焦点为 F . 过 F 的两条相互垂直的直线 m, n . m 与 C_1 交于 P, Q ; n 与 C_2 交于 M, N . 求四边形 $PMQN$ 面积的取值范围. (同类型)

- 抛物线 $C: y^2 = 2x$. P 在 C 上, 过焦点 F 的直线与 C 交于 A, B . $\vec{OA} + \vec{OB} = \lambda \vec{OP}$, $|\vec{AB}| \leq 8$. 求 λ 的取值范围.

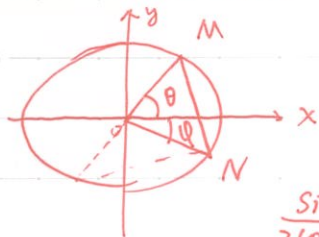
- $|2x+1| - |x-m| \geq |x-3|$ 的解集包含 $[3, 4]$ 求 m 范围.

$\Rightarrow |2x+1| - |x-m| \geq |x-3|$ 在 $[3, 4]$ 成立 $\Rightarrow 2x+1 - |x-m| \geq x-3$ 由范围去绝对值符号

$\therefore |x-m| \leq x+4 \Rightarrow$ 画图像 $m \in [-4, 10]$

极坐标和

和常值, 定值, 范围.

参数方程下的面积 (以 $k_a \cdot k_b = e^2 - 1$ 为背景的题目)在椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 中, M, N 在 C 上. $k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{1}{4}$ 证明: $\triangle MON$ 面积为定值引: 若 $k_{OM} \cdot k_{ON} = e^2 - 1$, 则 $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2}ab$ 

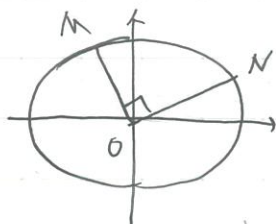
~~$M(p_1 \cos \theta, p_1 \sin \theta) \quad N(p_2 \cos \phi, p_2 \sin \phi)$~~

~~$\tan \theta \cdot \tan \phi = -\frac{1}{4}$~~

~~$M(a \cos \theta, b \sin \theta) \quad N(2 \cos \phi, \sin \phi)$~~

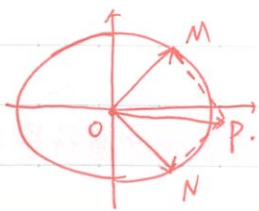
~~$\frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin \phi}{2 \cos \phi} = -\frac{1}{4} \quad \sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi = 0 \quad \cos(\theta - \phi) = 0$~~

~~$\theta - \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$~~

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中, $OM \perp ON$ 证明 $\frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2}$ 为定值 $\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$

O 到直线 MN 距离同样为定值 _____.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

在椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 中, M, N 在 C 上. $\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OP}$, $k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{1}{9}$.证明 $(\vec{MN})^2 + (\vec{OP})^2$ 为定值

$$M(3 \cos \theta, \sin \theta) \quad N(3 \cos \phi, \sin \phi)$$

$$k_{OM} \cdot k_{ON} = -\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{3 \cos \theta} \cdot \frac{\sin \phi}{3 \cos \phi} = -\frac{1}{9} \Rightarrow \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\theta - \phi) = 0. \quad \theta - \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$(\vec{MN})^2 + (\vec{OP})^2 = (3 \cos \theta - 3 \cos \phi)^2 + (\sin \theta - \sin \phi)^2 + (3 \cos \theta + 3 \cos \phi)^2 + (\sin \theta + \sin \phi)^2$$

$$= 18(\cos^2 \theta + \cos^2 \phi) + 2(\sin^2 \theta + \sin^2 \phi)$$

$$= 18[\cos^2(\phi + \frac{\pi}{2} + k\pi) + \cos^2 \phi] + 2[\sin^2(\phi + \frac{\pi}{2} + k\pi) + \sin^2 \phi]$$

$$= 18[\sin^2 \phi + \cos^2 \phi] + 2[\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] = 20$$

圆锥曲线4. 创新类题

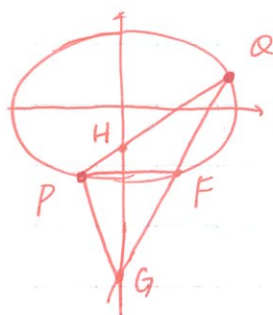
• 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B . $|AB|$ 中点为 $M(1, m)$. $m > 0$

(1). 证明: $k < -\frac{1}{2}$

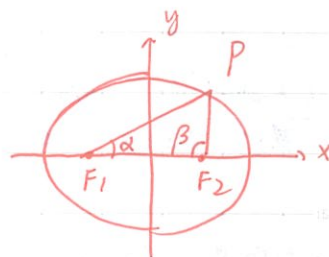
(2). F 为 C 的右焦点, P 在 C 上, $\vec{FP} + \vec{FA} + \vec{FB} = \vec{0}$. 证明: $|\vec{FA}|, |\vec{FP}|, |\vec{FB}|$ 为等差数列, 并求其公差.

(2018 全国Ⅲ·20)

• 椭圆: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 过 $H(0, -1)$ 的直线与其交于 P, Q . P 关于 y 轴对称点为 F . FQ 与 y 轴交于 G . 求 $\triangle PQG$ 面积的取值范围.



FQ 过定点 $G(0, -3) \Rightarrow$ 证明



• 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 左, 右焦点为 F_1, F_2 . C 上存在点 P $\frac{\sin \angle PF_2 F_1}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{c}{a}$.

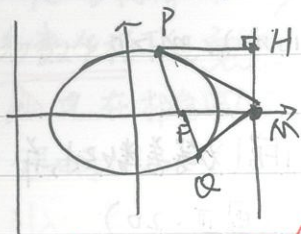
则其离心率范围是 ~~$(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$~~ $(\sqrt{2}-1, 1)$

① 正弦定理. 转化 等式 $\Rightarrow \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{c}{a} = e$

$\sin \theta = 0$

$(\sin \theta)^2$

椭圆第二定义



$$\frac{|PF|}{|PH|} = e$$

焦参数 $p = \frac{a^2}{c}$ (又焦点弦长)

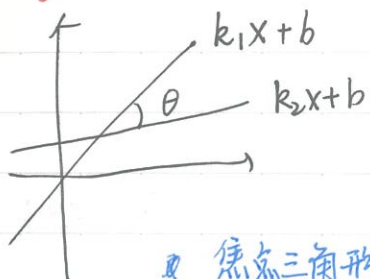
$$|PA| = \frac{2ep}{1 - e^2 \cos^2 \theta} \quad |PF| = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} \quad |QF| = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

$$|PF| = a - ex_p$$

$\angle PMF = \angle QMF$ (同样适用于双曲线, 抛物线)

$$x = -\frac{a^2}{c}$$

$$x = \frac{a^2}{c}$$



$$\tan \theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

焦点三角形的内切圆和外接圆

11. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在直线 $x = 2$ 上, 则 $\triangle PF_1F_2$ 外接圆半径的最小值为

A. 2

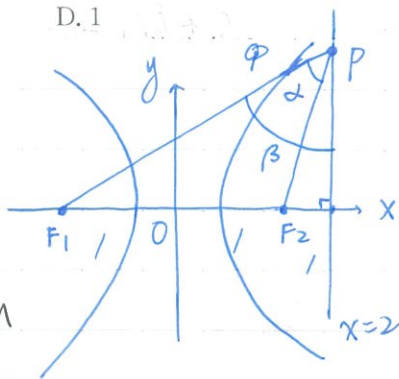
B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

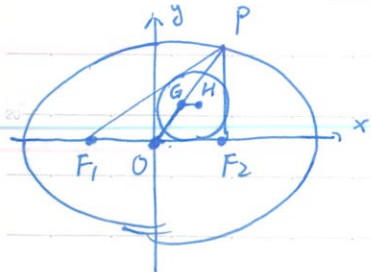
D. 1

$$R_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

其中 $\tan \alpha = \tan(\beta - \alpha)$ 直角三角形化正切



• 内切圆: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 左、右焦点为 F_1, F_2 . P 在 C 上. $\triangle PF_1F_2$ 重心为 G . 内切圆半径为 $\frac{|F_1F_2|}{4}$, 圆心为 M . 若 $GM \parallel F_1F_2$. $e = \frac{1}{2}$.



$$G \text{ 在 } OP \text{ 上. } \frac{y_G}{OG} = \frac{y_P}{OP} \quad OG = \frac{1}{3}OP \Rightarrow \text{重心性质}$$

$$y_G = y_H = R = \frac{c}{2} \quad \therefore y_P = \frac{3}{2}c$$

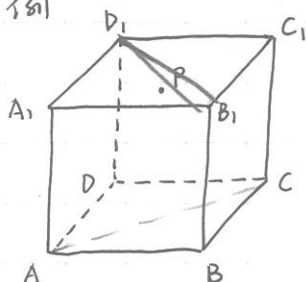
$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{3}{2}c \times 2c \times \frac{1}{2} \quad \text{又 } R_A = \frac{2S}{L} = \frac{2S}{4a} \quad \text{①}$$

$$\text{①②联立} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

重心与边平行模型. 因 $R = \frac{2S}{L}$ 结合重心三分性质及代换面积表达式

圆锥曲线 5. 轨迹; 曲线与方程

• 例

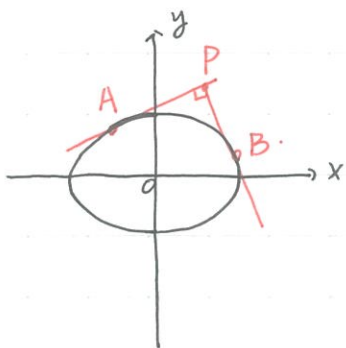


正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是平面 DCC_1D_1 上的点.

若 $S_{\triangle PAD} = 2S_{\triangle PCB}$, P 轨迹是 _____.

$S_{\triangle PAD} = S_{\triangle PCC_1}$, P 轨迹是 _____.

• 椭圆蒙日圆.



过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 外一点作两条相互垂直切线

P 轨迹是圆: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

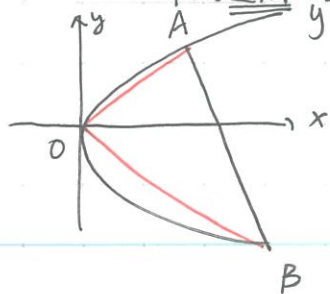
eg. 过 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ ($r > 0$) 上一点可以作

$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 两条相互垂直切线, r 的范围是 _____.

双曲线蒙日圆 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 有意义

圆 蒙日圆: $x^2 + y^2 = 2r^2$

• 抛物线中的定点



$$y^2 = 2px$$

若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \lambda$

则 AB 恒过定点 $(t, 0)$

其中 t 是方程 $t^2 - 2pt - \lambda = 0$ 的根. (正根)

即 $OA \perp OB$, AB 恒过定点 $(2p, 0)$

$$t = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 + 4\lambda}}{2} \quad \text{正根}$$

$$t^2 - 2pt - \lambda = 0$$

椭圆参数方程:

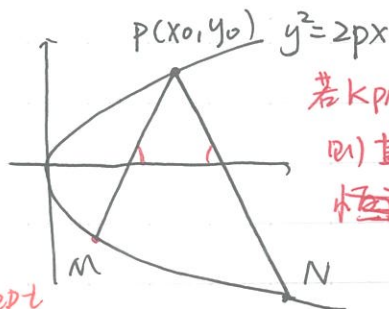
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

双曲线参数方程:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$

抛物线参数方程

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2pt \\ x = 2pt^2 \end{cases}$$



若 $k_{PM} + k_{PN} = 0$

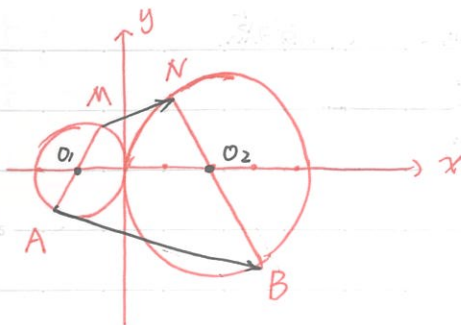
则直线 MN 中

恒过定点 $K_{MN} = -\frac{p}{y_0}$

平面向量. 基本定理, 数量积转化.

$$\vec{AB} \cdot \vec{MN}$$

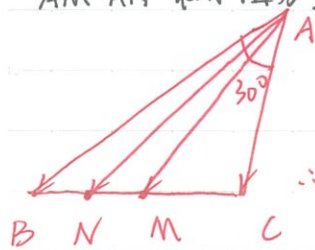
• AM, BN 分别是圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的直径. ~~AM, BN~~ 范围:



$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{MN} &= (\vec{AO}_1 + \vec{O}_1\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{B}) \cdot (\vec{MO}_1 + \vec{O}_1\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{N}) \\ &= [\vec{O}_1\vec{O}_2 + (\vec{AO}_1 + \vec{O}_2\vec{B})] [\vec{O}_1\vec{O}_2 - (\vec{AO}_1 + \vec{O}_2\vec{B})] \\ &= (\vec{O}_1\vec{O}_2)^2 - (\vec{AO}_1 + \vec{O}_2\vec{B})^2 \\ (\vec{O}_1\vec{O}_2)^2 &= 9. |\vec{AO}_1 + \vec{O}_2\vec{B}| \in [1, 3] \\ \vec{AB} \cdot \vec{MN} &\in [0, 8]. \end{aligned}$$

• $\triangle ABC$ 中. $A = \frac{\pi}{6}$. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$. M 是 BC 中点, N 是 BM 中点.

$\vec{AM} \cdot \vec{AN}$ 最小值为 6. 此时 $BC =$ 2.



$$\text{已知 } b \cdot c = 4\sqrt{3}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \quad \vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AM})$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AM} \cdot \vec{AN} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}) \quad \text{结合:} \\ &= \frac{1}{8}\vec{AC}^2 + \frac{3}{8}\vec{AB}^2 + 3 \geq 3 + 3 = 6 \quad (\text{均值不等式放}) \end{aligned}$$

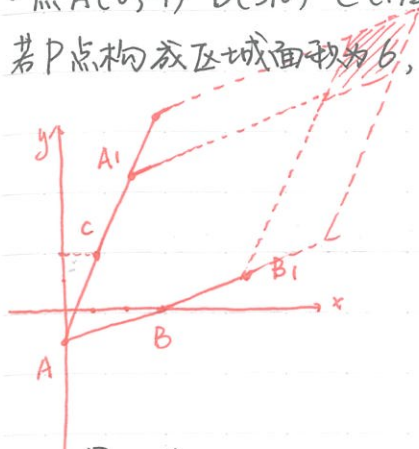
$$\text{此时 } b = 2\sqrt{3} \quad c = 2 \quad \therefore a = 2$$

• $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. 则 $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$ 的取值范围是 $[4, 2\sqrt{5}]$.

两个动点, 与一动一定本质相同. 采取圆上画图定点.

立体几何(中) 平面向量.

范围: • 点 $A(0, -1)$ $B(3, 0)$ $C(1, 2)$. P 满足 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$. ($2 < \lambda \leq m$, $2 < \mu \leq n$)
若 P 点构成区域面积为 b , $(m+n)_{\min} = \underline{4+\sqrt{3}}$ 等和线



若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$

$$S_P = (\lambda_2 - \lambda_1) |\vec{AB}| (\mu_2 - \mu_1) |\vec{AC}| \cdot \sin \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$$

• 向量不等式

$$\textcircled{1} \quad ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

同样地

$$||\lambda \vec{a}| - |\mu \vec{b}|| \leq |\lambda \vec{a} \pm \mu \vec{b}| \leq |\lambda \vec{a}| + |\mu \vec{b}| \quad |\lambda \vec{a} \cdot \mu \vec{b}| \leq |\lambda| |\vec{a}| |\mu \vec{b}|$$

换基底法.

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{a}| = 2, |2\vec{a} + \vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ 范围是 } \underline{\quad}$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{m}| = 2, \vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{m} - 2\vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{m} - 2\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{m} - 8 \quad |\vec{a} \cdot \vec{m}| \leq |\vec{a}| |\vec{m}| = 4$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} \in [-12, -4]$$

$$|\vec{a}| = 2, |2\vec{a} + \vec{b}| = 2, |3\vec{a} + 2\vec{b}| \text{ 范围是 } \underline{\quad}$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{m}| = 2, \vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{m} - \vec{a}| \quad \therefore ||2\vec{m}| - |\vec{a}|| \leq |2\vec{m} - \vec{a}| \leq |2\vec{m}| + |\vec{a}| \in [2, 6]$$

$$\triangle |2\vec{a} + \vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = -4, |\vec{a}| \text{ 范围是}$$

$$4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 4 \Rightarrow 4\vec{a}^2 - 16 + \vec{b}^2 = 4 \Rightarrow \vec{b}^2 = 20 - 4\vec{a}^2$$

$$\cos \theta = -\frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \underline{\underline{\frac{4}{|\vec{a}| |\vec{b}|}}} \in [-1, 1] \Rightarrow |\vec{a}|^2 (5 - |\vec{a}|^2) \geq 4 \quad \underline{1 \leq |\vec{a}| \leq 2}$$

$$\bullet |2\vec{a} + \vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} \in [-4, 0] \quad |\vec{a}| \text{ 范围是}$$

构建双向量, 反代得到 $|k\vec{a} + \vec{m}| = c$ 常数
 $|k\vec{b} + \vec{m}| = d$ 常数

构造双基底

通法:

换元配方法求模

① 第一向量 $\rightarrow$ ② 第二向量 $\rightarrow$ ③ 重建目标 $\rightarrow$ ④ 求解目标• $|\vec{a}-\vec{b}|=2, |\vec{a}|=2|\vec{b}|$. 则 $|\vec{a}+2\vec{b}|$ 范围 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{m}|=2, \vec{a}-\vec{b}=\vec{m} \Rightarrow |\vec{b}+\vec{m}|=|2\vec{b}|$ ① 构建第一向量① $\Rightarrow b^2+2mb+b^2m^2=4b^2 \Rightarrow 3b^2-2mb=m^2$ 把已知量 $m^2=4$ 放一边 $b^2-\frac{2}{3}mb+\frac{1}{9}m^2=\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{9}m^2 \Rightarrow |\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{m}|=\frac{4}{9}m^2=\frac{4}{3}$ ② 构建第二向量

$$|\vec{m}|=2, |\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{m}|=\frac{4}{3}$$

向量不等式

$$\vec{a}+2\vec{b} = |\vec{m}+3\vec{b}| = \left| 3(\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{m})+2\vec{m} \right| \in [0, 8]$$

拉格朗日数乘法

 $x, y > 0, x+2y+2xy=8$. 则 $(x+2y)_{\min} = \underline{\quad}$ (法一) (因式分解+基本不等式)

$$\text{法二} \quad L = \underbrace{x+2y}_{\text{目标量}} + \lambda(\underbrace{x+2y+2xy-8}_{\text{已知量移项}})$$

$$L'_x (\text{对 } x \text{ 求导}) = 1 + \lambda + 2\lambda y \quad ①$$

$$L'_y = 2 + 2\lambda + 2\lambda \cdot x = 0 \quad ② \quad \text{令 } ①=②=③=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$L'_\lambda = x + 2y + 2xy - 8 \quad ③$$

$$(x+2y)_{\min} = 4$$

 $x, y > 0, 3y+x=5xy, (3x+4y)_{\min} = \underline{\quad}$

$$L = 3x+4y + \lambda(x+3y-5xy)$$

$$L'_x = 3 + \lambda - 5\lambda y \quad ①$$

$$L'_y = 4 + 3\lambda - 5\lambda \cdot x \quad ② \quad \text{令 } ①=②=③=0 \Rightarrow$$

$$L'_\lambda = x+3y-5xy \quad ③$$

已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且满足 $4x+y+2xy+1=0$, 则 x^2+y^2+x+ $4y$ 的最小值为 $\underline{-\frac{13}{4}}$

立体几何(小) -

- 圆柱轴截面为正方形, 母线长为 $\sqrt{6}$. 圆柱内有一棱长为 a 的正四面体, 该正四面体在该圆柱内可任意转动. a 最大值为_____.

(2) 考虑球



正四面体的外接球可以放入该圆柱中。(旋转问题)

- 正 $\triangle ABC$ 边长为2. 过A直线 l 与过BC平面 α 交于D. 将 α 绕BC转动(不与平面ABC重合, 且 l, AB, AC 与 α 成角相等. 当 V_{A-BCD} 体积最大时, l 与 α 成角正弦值为 $(\frac{\sqrt{2}}{2})$

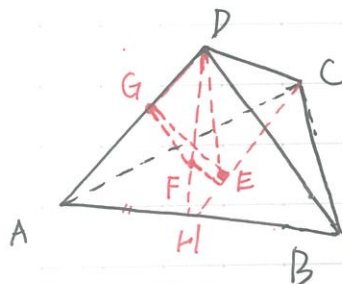
- 两个正四面体的顶点均为棱长为1的正方体的顶点. 这两个正四面体公共部分体积为



- 棱长为4的正方体中有一半径为1的球. 该球不能接触到的空间的体积为

- 10 三棱锥 $D-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为6的正三角形, DA, DB, DC 互相垂直, $DE \perp$ 平面 ABC , 垂足为 E , $EF \perp$ 平面 DAB , 垂足为 F , $FG \perp$ 平面 DAC , 垂足为 G , 则三棱锥 $G-DEF$ 的体积为

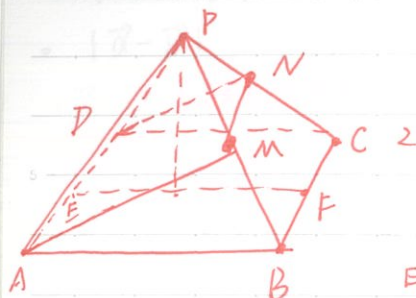
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



立体几何

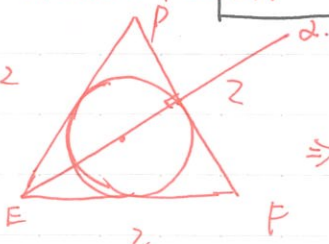
把正方体三棱锥DABC的特殊之处

• 正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $PA=\sqrt{5}$, 内切球为 G , 平面 α 过 AD 与棱 PB, PC 交于 M, N , 且 α 与底面 $ABCD$ 夹角为 30° . 平面 α 截球 G 所得面积为 _____



内切球半径 $R_{\text{内}} = \frac{3V}{S_{\text{表}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

E, F 为中点



(正视图)

$\Rightarrow \alpha$ 截面即为过球心的大圆

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi}{3}$$

• 祖暅原理拓展

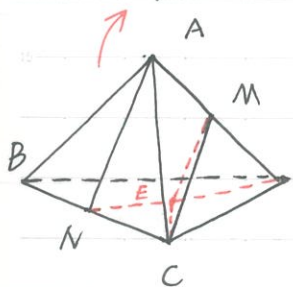
在空间中, 有线段 AB, CD (异面直线) 距离为 d , 成角为 θ .

则 V_{A-BCD} 满足

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{6} |AB| \cdot |CD| \cdot d \cdot \sin \theta$$

• 思想方法: 不建系, 平移线段 解三角形

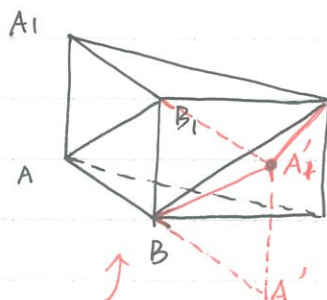
$\triangle$ 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AC=BD=CD=3, AD=BC=2, M, N$ 是 AD, BC 中点. $\cos \langle AN, CM \rangle =$



取 ND 中点 E .

$AN \parallel ME$

解 $\triangle MEC$
 $\cos \langle \rangle = \frac{7}{8}$



延长作垂线

$\Rightarrow$ 解 $\triangle A_1C_1B$

$$\cos \langle \rangle = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\triangle$ 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $\angle ABC=120^\circ, AB=2, BC=CC_1=1, \cos \langle AB_1, BC_1 \rangle = \frac{\sqrt{10}}{5}$

⑩ 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 2 的

正三角形, 当三棱锥 $A-BCD$ 的表面积最大时, 其内切球的半径是

$$\frac{3V}{S_{\text{表}}}$$

A. $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

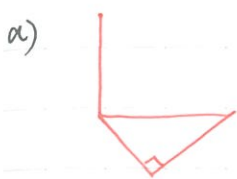
B. $2 - \sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$ BEIJING

D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

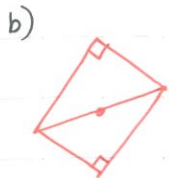
立体几何 外接球 内接球

① 模型 (外接球)



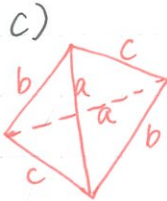
侧棱 $\perp$ 底面

$$R_{\text{球}}^2 = R_{\text{底面外接圆半径}}^2 + \left(\frac{h_{\text{侧棱}}}{2}\right)^2$$



共斜边等直角 $\triangle$

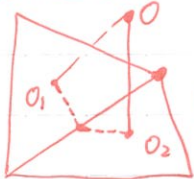
$$R_{\text{球}} = \frac{l_{\text{斜边}}}{2}$$



对棱相等四面体

$$R_{\text{球}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2\sqrt{2}}$$

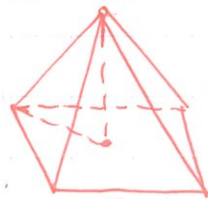
d) 两平面成角 θ



球心确定方法:

两平面外心垂线交点

e) 正棱锥外接球



$$\text{侧棱}^2 = \text{锥高} \cdot \text{球直径}$$

特殊: 棱长为 a 的正四面体外接球半径 $R_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ 四面体球 - $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

内切球公式: $R_{\text{球}} = \frac{3V}{S_{\text{表}}}$

内切球半径 $R_2 = \frac{\sqrt{6}}{12}a$

类比 $R_{\text{内}} = \frac{2S}{L}$

• 四面体 $A-BCD$ 中, $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$, $AB = 3$, $CB = DB = 2$. 该四面体外接球体积为 $\frac{19}{2}\pi$ 判关系 (垂直, 平行...)

• 三棱锥 $A-BCD$ 为正三棱锥, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$. 球 O 为其外接球, 点 E 在 BD 上, $BD = 6BE$. 过 E 作球 O 截面, 截面面积取值范围是 $[\frac{5}{4}\pi, 4\pi]$

截面面积取最值点: 截面过球心 $\Rightarrow \max$

$OE \perp \text{截面} \Rightarrow \min$

11. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的表面上,

$PA \perp \text{底面 } ABC$, $AB \perp AC$, $AB = 6$, $AC = 8$, D 是线段 AB 上一点, 且 $AD = 5DB$. 过点 D 作球 O 的截面, 若所得截面圆面积的最大值与最小值之差为 28π , 则球 O 的表面积为

A. 128π

B. 132π

C. 144π

D. 156π

★数列★ 万物皆可裂.

① 裂项原则: 下标连续, 本质相同 ($a_n = b_n - b_{n+1}$)

求和连续消项, 留下一头一尾

° $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 裂项 $\frac{1}{3次} = (\frac{1}{2次} - \frac{1}{2次})$ 变比

° $a_n = \frac{4n+2}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \times 2$

° $a_n = 2n$ (一次方差) 一次裂成两个二次的差 (次数升高 $-3 \rightarrow -2$)

$a_n = 2n = - (n^2 - (n+1)^2) - 1 = \underline{(n+1)^2 - n^2} - 1$

$a_n = 3n^2 + 2n$ 次数升高 $= - (n^3 - (n+1)^3) - (n+1) = \underline{(n+1)^3 - n^3} - (n+1)$ 方差

思考数列的本质: $n \rightarrow +\infty$ 看关系

$a_n = \frac{2^{n+1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$ $n \rightarrow +\infty$ $a_n = \frac{\text{指数}}{\text{指} \cdot \text{指}} = \frac{1}{\text{指数}}$ 本质

$= \left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1} \right) \times 2$

$a_n = \frac{n+2}{2^n \cdot n(n+1)}$ 本质: $\frac{\text{一次}}{\text{二次} \cdot \text{指数}} = \frac{1}{\text{一次} \cdot \text{指数}}$

$= \left(\frac{1}{2^n \times n} - \frac{1}{2^{n+1} \times (n+1)} \right) \times 2$

$a_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n$

本质: 一次·指数 (错位相减!) 最后结论

$= \left[n \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \times (n+1) \right] \times 2$

★裂"和"型数列 $a_n = \frac{(-1)^n a_n}{(2n-1)(2n+1)}$ 的前n项和为_____.

低级运算式作为变量

导数8. 综合应用 三级同构 $\rightarrow$ 三级运算式 $e^x \ln x x$ 同时出现

$x \in (1, e^2)$ 时, $e^x - x \geq x^a - a \ln x$ ($a > 0$) 成立. a 的最大值为 e

方法: 同构 $e^x - x \geq x^a - \ln x^a$

$$\triangle e^x - x \geq e^{\ln x^a} - \ln x^a \rightarrow$$

$g(x) = e^x - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $\uparrow$

$$\therefore a \ln x \leq x \quad \therefore a \leq e$$

同构或相似结构之
构造函数判断单调性

指对形式同构

$k > 0, x > 0, \log_2 x - k \cdot 2^{kx} \geq 0$. k 最大值为

$$\frac{\ln x}{\ln 2} \geq k \cdot (e^{\ln 2})^{kx} \Rightarrow \ln x \geq k \ln 2 \cdot e^{kx \cdot \ln 2} \Rightarrow x \ln x \geq kx \cdot \ln 2 \cdot e^{kx \cdot \ln 2}$$

$$a. h(x) = x e^x \quad h(\ln x) \geq h(kx \ln 2) \quad \therefore \ln x \geq kx \ln 2. \quad (k \leq \log_2 e)$$

$x^{a+1} \ln x^a$ 尝试合到一起, 结构相似的尽量靠近.

$a < 0, x^{a+1} \cdot e^x + a \ln x \geq 0$ 对 $x > 1$ 成立. a 最小值为

$$x^{a+1} \cdot e^x + a \ln x \geq 0$$

$$x \cdot e^x + \frac{a \ln x}{x^a} \geq 0$$

$$x e^x + \frac{\ln x^{-a}}{x^a} \geq 0 \quad (a < 0)$$

$$x \cdot e^x + \ln \frac{1}{x^a} \cdot e^{\ln \frac{1}{x^a}} \geq 0$$

$$x e^x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单增}$$

$$\therefore x > \ln \frac{1}{x^a}$$

$$a \geq -e$$

注意 a 符号.

$x > 0, \frac{e^{x-1}}{x} \geq x - \ln x + a$ 成立. a 最大值为

e^2

改写成 e^x 形式

$$\Rightarrow \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{e} \geq \ln \frac{e^x}{x} + a \quad \frac{e^x}{x} = t \quad (t > 0)$$

$$e^{x-1} \cdot x^{-1} \geq x - \ln x + a$$

$$a \leq \frac{1}{e} \cdot t - \ln t \quad \text{分母做}$$

$$e^{x-1} \cdot e^{\ln \frac{1}{x}} \geq x - \ln x + a \rightarrow e^{x-\ln x-1} \geq x - \ln x + a$$

$$a_{\max} = 0$$

$a e^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$, 求 a 的范围.

$$e^{\ln a} \cdot e^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1 \rightarrow e^{x+\ln a-1} + x + \ln a - 1 \geq x + \ln x \quad \text{凑项}$$

$\star \frac{e^x}{e^a} = \ln x + a$ 有两解. 求 a 的范围.

$$e^x = e^a (\ln x + a) \Rightarrow x e^x = x e^a (\ln x + a) \Rightarrow x e^x = e^{\ln x + a} (\ln x + a)$$

$$\text{同构恒变式: } x = e^{\ln x} \quad x = \ln e^x$$

• $e^x + 1 \geq a \ln(ax-1) \geq 0$ 对 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 成立. $a \in$

• $x^2 - (a+2)x + a \ln x \geq 1$. 求 a 的取值范围. ★?

$a \leq 0$, $f'(x) > 0$, $x > 1$ $f'(x) < 0$ $0 < x < 1$

$f(x)$ 在 $(0, 1) \downarrow$ 在 $(1, +\infty) \uparrow$ $f(x) \geq f(1) = -a-1 \geq 1$ $a \leq -2$

$a > 0$ $f(\frac{1}{e}) < 0$ $\therefore a \in (-\infty, -2]$

• $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ x - a \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 若 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立, a 的范围是

• $x \in [-2, 1]$ 时, $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 成立. a 的范围是

误区

▲ $x > 0$ 时 $e^x + ax^2 - x \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$. a 的范围是 • 为什么此题无法用必要条件

~~充分性~~ 必要性 $\Rightarrow$ 充分性

充分性法?

车皮: 若一个函数可以配凑成标准的泰勒展开, 那么一般情况下的可以
用必要条件的充分性法的.

车皮: 当式两端在 $x = x_0$ 取等相切.

$\underbrace{e^x}_{\sqrt{}} = \underbrace{1}_{\sqrt{}} + \underbrace{x}_{\sqrt{}} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(R_n)$ 原题中若是 $\frac{1}{6}x^3$ 就是正确的

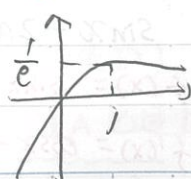
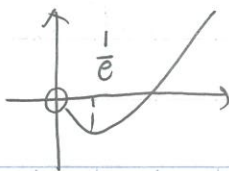
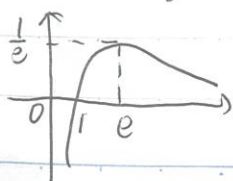
eg.

常见可切函数

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $y = kx + b$ $f(x) = x \ln x$

$f(x) = xe^x$

$f(x) = \frac{x}{e^x}$



求完临界记得回头验证排除

10. 若函数 $f(x) = x^2 - a \cos x + a^2 + 3a - 8$ 有唯一零点, 则 $a =$

必要性探路种杂

A. -2

B. 2 或 -4

C. -4

D. 2

• $x \geq 0$ 时, $e^x - ax \geq 2 - \cos x$. 求 a 的取值范围.分类界点 $g(x) = e^x + \cos x - ax - 2 \geq 0$

(必要性充分性探路)

$$g'(x) = e^x - \sin x - a$$

$$g'(0) = 1 - a, \quad g(0) = 0$$

由此知 ① 若 $a > 1$, $g'(0) < 0$ 单 ↓ $g(0) = 0$. 无法使 $g(x) \geq 0$ 恒成立

② $a \leq 1$ $h(x) = e^x - \sin x - a$ $h'(x) = e^x - \cos x \geq 0$

 $\therefore g'(x)$ 单 ↑. $g(0) = 1 - a > 0$ $\therefore$ 合题意. 故 $a \in (-\infty, 1]$

• 三角结合:

 $x(e^x + \cos x - ax - 2) \geq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上恒成立. 求 a 范围.

$$f(0) = 0 \quad \therefore f'(0) \geq 0 \quad f'(0) = 0 \text{ 成立}$$

$$\therefore f''(0) \geq 0 \quad f''(0) = 2 - 2a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 1$$

必要性结论 (端点效应范围).

看两端函数斜率相对关系. ① $e^x + \sin x + \cos x \geq 2 + ax$. 则 $a =$

(2021 八省联考) 泰勒展开

$$e^x + \sin x + \cos x - ax - 2 \geq 0 \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 2 - a = 0 \quad a = 2$$

为什么这里是个具体值? 在零点处一阶导函数与参数有关 $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \rightarrow$ 泰勒展开必要性证明 $\Rightarrow$ 把某些参数范围当作条件证明原命题恒成立. (充分性)• $x \in [0, \pi]$ $2 \sin x - x \cos x - x \geq ax$. a 的范围是 (2019 全工文 20)

$$f(0) = 0 \quad f'(x) = \cos x + x \sin x - 1 - a \quad f'(0) = -a \geq 0$$

$$a \leq 0$$
 泰勒展开

• $x \in (1, +\infty)$ 时, $(x+1) \ln x - a(x-1) > 0$. a 的范围是 (2016 全工文 21)

$$f(1) = 0 \quad f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a \quad f'(1) = 2 - a \geq 0 \quad a \leq 2$$

• $x \geq 0$ 时 $(1-x^2)e^x \leq ax + 1$. a 的范围是 (2017 全工理 21)

$$f(0) = 0 \quad f'(x) = e^x(1-x^2-2x) - a \quad f'(0) = 1 - a \leq 0 \quad a \geq 1$$

• $\sin x - 2ax \leq ax \cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 成立. a 的范围是 ()

$$f(x) = \sin x - 2ax - ax \cos x \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x - a \cos x + ax \sin x - 2a \quad f'(0) = 1 - 3a \leq 0$$

$$a \geq \frac{1}{3}$$

多项式解决方法

排列组合法

1. $(1-x)(x+\frac{1}{x}+2)^4$ 的展开式中 x 的系数是 12

A. 10

B. 2

C. -14

D. 34

在4个相乘的 $(x+\frac{1}{x}+2)$ 中常数项 $2^4 \Rightarrow -x \Rightarrow -16x$

x 项: $2 \times x$ $1 \times \frac{1}{x}$ $1 \times 2 \Rightarrow 8x$ $-16 - 6 + 8 = -14$ ② $2 \times x \cdot 2 \times \frac{1}{x} \Rightarrow -x \Rightarrow 6x$

已知 $m > 0$, $(x^2 + x + m)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 56, 则 $m =$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

排列组合法. 取 x^3 , 即在 4 个相乘的 (x^2+x+m) 中

区分不同种情况

取 1 个 x^2 1 个 x 2 个 m 或 3 个 x 1 个 m
 (全取) $\rightarrow C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 m^2 + C_4^3 + C_4^1 m = 56$ ($m > 0$) $m = 2$

5. 某班班会准备从甲、乙等 7 名学生中选派 4 名学生发言, 要

区分有序与无序

求甲、乙两人至少有一人参加, 且当甲、乙同时参加时, 他们

7 选 4 无序, 排列顺序有序.

两人的发言不能相邻, 那么不同的发言顺序的种数为

A. 360

B. 520

C. 720

D. 600

甲/乙参加 + 甲乙都参加.

要把 6 封不同的信送给 6 个不同的人, 其中有 3 封信送错的概率为

即 3 人对 3 人错 $C_6^3 \cdot 2 \rightarrow$ 三个人全错只有 2 种可能.

定序 $\rightarrow$ 送对 3 封信已定 10^3

10. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $(1-2x)^{2021} = b_0 +$

取特值. $x = \frac{1}{2}$

$b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{2021}x^{2021}$, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots +$

$1 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots + \frac{b_{2021}}{2^{2021}} = a_1$

取 $x = \frac{1}{2}$ $\frac{b_{2021}}{2^{2021}} = a_{2021} = S_n \cdot S_{n+1}$, 则 $S_{2021} =$

$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{2021} = 1$

$a_{n+1} = S_n \cdot S_{n+1}$ $S_{n+1} - S_n = S_n S_{n+1}$

A. $-\frac{1}{2^{2021}}$ $\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = 1$

B. $\frac{1}{2^{2021}}$ $\left[\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1 \right]$

$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1$

$S_1 = 1$

C. 2^{2021} $\frac{1}{S_n S_{n+1}}$

D. -2^{2021} $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 为等差

$\therefore S_n = -\frac{1}{n}$ $S_{2021} = -\frac{1}{2021}$

5. 有 A, B, C, D, E, F 共 6 个集装箱, 准备用甲、乙、丙三辆卡

车运送, 每辆卡车运 2 个. 若卡车甲不能运 A 箱, 卡车乙不

能运 D 箱, 此外无其他任何限制; 要把这 6 个集装箱分给

这 3 辆卡车运送, 则不同的分配方案的种数为 90

A. 168

B. 84

C. 56

D. 42

甲 乙 丙
 00 00 00
 (-共) - (甲运 A) - (乙运 D)
 + (甲运 A 乙运 D)
 = 42

12. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ ($a < 0$) 有

个零点, 则 $a+b$ 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, -1)$
C. $(-\infty, -\frac{1}{4})$ D. $(-\infty, \frac{1}{4})$

8. 设 $a = 2^{0.6}$, $b = 3^{0.4}$, $c =$

$\log_3 10$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $a < b < c$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - m(\ln x + x + \frac{2}{x})$ 恰有两个极值点,

则实数 m 的取值范围为

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$
C. $(\frac{1}{2}, \frac{e}{3}) \cup (\frac{e}{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup (\frac{e}{3}, +\infty)$

$$a = (2^{0.3})^2 \quad b = (3^{0.2})^2$$

又需比较 $2^{0.3}$ 和 $3^{0.2}$

$$\therefore \frac{0.3 \ln 2}{0.2} \quad \frac{0.2 \ln 3}{0.3}$$

$$\Rightarrow m = \frac{e^x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

有2解. 注意 $x \neq 1$
即 $m \neq \frac{e}{3}$

12. 对于函数 $f(x)$, 若 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 则 $f'(x)$ 的零点叫做函数 $f(x)$ 的驻点 (Stationary Point), 又称为平稳点、稳定点或临界点. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上

存在驻点, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为

- A. 2 B. 4 C. 6 D. $\frac{9}{5}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{令 } 1 \text{ 为根 } 2a + b - 3 = 0$$

$$a^2 + b^2 \uparrow \text{ 距离平方 } \Rightarrow (\frac{3}{\sqrt{5}})^2 = \frac{9}{5}$$

12. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $b \ln(a+1) = a \ln(b+2)$, 则下列不等式恒成立的个数是

- ① $a^3 < b^3$; ② $e^b + e^{-a} > e^a + e^{-b}$; ③ $a - \frac{1}{b} < b - \frac{1}{a}$; ④ $\frac{b}{a} > \frac{b^a}{a^b}$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

$$\frac{\ln(a+1)}{a} = \frac{\ln(b+2)}{b}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \quad \text{在 } (0, +\infty) \downarrow \quad b > a$$

11. 已知 O 为坐标原点, 抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上一点 A 到焦点 F 的距离为 4, 若点 M 为抛物线 C 准线上的动点, 给出以下

说法: $|AF| \geq |OF|$ 抛物线性质

① 当 $\triangle MAF$ 为正三角形时, p 的值为 2; $p=2$

② 存在 M 点, 使得 $\vec{MA} - \vec{MF} = \vec{0}$; $\vec{MA} = \vec{MF}$

③ 若 $\vec{MF} = 3\vec{FA}$, 则 $p=3$; $x=4$. 相似比转换

④ 若 $|OM| + |MA|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$, 则 $p=4$ 或 12 .

其中正确的是

- A. ①③④ B. ②③ C. ①③ D. ②③④

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为

F_1, F_2, M 为 C 的渐近线上一点, 直线 F_2M 交 C 于点 N , 且

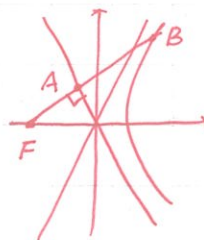
$\vec{F_2M} \cdot \vec{OM} = 0$ (O 为坐标原点), $\vec{F_2M} = \frac{3}{2}\vec{F_2N}$, 则双曲线 C 的离心率为 $e^2 - 1$ 公式 $n \cdot e = \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2}}$

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$ 离心率

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别

为 F_1, F_2 , 设过 F_2 的直线 l 与 C 的右支相交于 A, B 两点, 且 $|AF_1| = |F_1F_2|$, $|BF_2| = 2|AF_2|$, 则双曲线 C 的离心率是

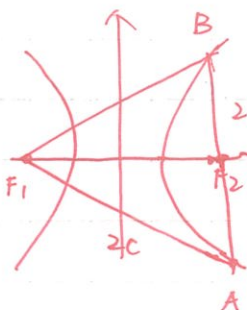
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$



$$\vec{FB} = n\vec{FA}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2}}$$

注形式



$\triangle AF_1F_2$
 $\triangle BF_1F_2$
互补角模型
勾股定理

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 若以点

A 为圆心、双曲线的实半轴长为半径的圆与双曲线的一条渐近线交于点 B , 与 x 轴正半轴交于点 D , 且线段 BD 交双曲线于点 C , $\vec{DC} = 3\vec{CB}$, 则双曲线的离心率是 $\sqrt{17}$. $\sqrt{2}$

圆锥曲线定比分点

$$e \cos \theta = \frac{n-1}{n+1}$$

过焦点直线的倾斜角

数列求和不等式

本质 $\begin{matrix} S_{n1} & S_{n2} \\ \text{左边} & \text{右边} \end{matrix} \Rightarrow \text{与数列之间建立关系}$
 $\downarrow$
 $a_{n1} < a_{n2}$

证明: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

法一) 数学归纳法

法二) $S_{n1} = \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = S_{n2}$

$a_1 = ?$

$a_2 = \frac{1}{n}$

首项差并

$$S_{n1} - S_{n1-1} = a_{n1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$\rightarrow$ 即为证 $\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$

$$\triangle [\ln(t+1) < t]$$

证明: $\frac{\ln 2}{2} \times \frac{\ln 3}{3} \times \dots \times \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{n} = S_{n2}$

$$S_{n1} = \ln n \quad a_{n1} = \frac{\ln n}{n}$$

$$\frac{S_{n2}}{S_{n1}} = a_{n2} = \frac{n-1}{n}$$

与前式保持一致
首项积并

即为证明 $\frac{\ln n}{n} < \frac{n-1}{n} \triangle$

证明: $(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^2}) < e \quad (n \geq 2)$

法一) 局限 $\ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \ln(1 + \frac{1}{3^2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{n^2}) < \frac{1}{n} \times n$

又证 $\ln(1 + \frac{1}{n^2}) < \frac{1}{n} \quad \text{即} \quad (n \geq 2)$

法二)

证明: $\sum_{i=1}^n [\ln(i) + \ln(i+1)] > \frac{n^2 - n - 1}{n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

数学归纳法.

含绝对值的不等式

若 $a \leq 0, b = \frac{1}{2} \forall x_1, x_2 \in (1, e), \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < 3$. a 范围: _____

$$f(x) = ax \ln x - bx^2 - ax$$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2n+1} + a_{2n} = 4n - 1, a_{2n} - a_{2n-1} = 4n -$ 例举.
 3, 若数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项和为 1273, 则 $a_3 =$ $a_{2n+1} + a_{2n}$ 令 $a_1 = 0, 1, 2, \dots$
 A. 0 B. -1 C. 1 D. 2 依题例, 发现 a_3 均为 2

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n \cos \frac{n}{2} \pi, b_n = a_n + a_{n+1}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 50 项和为 100. -52 类同周期性数列.
 $a_n = 0, -2, 0, 4, \dots$
 $b_n =$

19. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2} + x_n = 2x_{n+1} + 3$, 且 $x_1 = 1, x_2 = 5$,
 则 $x_{40} =$ 2301 2380 递推得 $\bar{a}_i$

• 数列 $a_n = n \cdot \sin \frac{2}{3} n \pi$, 则 $S_{2022} =$ $-337\sqrt{3}$

• 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = n$, 则 $a_{20} =$ 9

19. (12分) 某地为鼓励群众参与“全民读书活动”，增加参与读书的趣味性，主办方设计这样一个小游戏：参与者抛掷一枚质地均匀的骰子（正方体，六个面上分别刻着1, 2, 3, 4, 5, 6点），若朝上的点数为偶数，则继续抛掷一次；若朝上的点数为奇数，则停止游戏。照这样的规则进行，最多允许抛掷3次。每位参与者只能参加一次游戏。

(1) 求游戏结束时朝上点数之和为5的概率。

(2) 参与者可以选择两种方案，方案一：游戏结束时，若朝上的点数之和为偶数，奖励3本不同的畅销书；若朝上的点数之和为奇数，奖励1本畅销书。方案二：游戏结束时，最后一次朝上的点数为偶数，奖励5本不同的畅销书，否则，无奖励。试分析哪一种方案能使游戏参与者获得更多畅销书奖励？并说明判断的理由。

隐含条件
连续抛掷应使得每次点数均为偶

方案一：

① 点数和为偶，则每次均应为偶

(出现奇即结束) $\frac{2}{4/6} \frac{2}{4/6} \frac{2}{4/6}$

$$P(\text{偶}) = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{奇}) = \frac{7}{8}$$

$$E(X_1) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{10}{8}$$

方案二：最后一次上偶。

则仍为偶偶偶 $P(\text{偶}) = \frac{1}{8} \quad E(X_2) = \frac{5}{8}$

$$E(X_1) > E(X_2)$$

9. 元宵节是中国传统节日，放烟花、吃汤圆、观花灯是常见的元宵节民俗活动。某社区计划举办元宵节猜灯谜活动，准备在3个不同的地方悬挂5盏不同的花灯，其中2盏是人物灯。现要求这3个地方都有灯（同一地方的花灯不考虑位置的差别），且人物灯不能挂在同一个地方，则不同的悬挂方法种数为

A. 114 B. 92 C. 72 D. 42

分组

注意实验的无序、有序性

$$\begin{aligned} & 3 \text{ 个 } 1, 1, 1, \quad 2, 2, 1 \\ & A_3^3, \quad 0, 1, 2, 2, \quad C_4^2 A_3^3 \\ & \quad \quad \quad 2, 1, 2, 2, \quad C_4^1 C_3^2 A_3^3 \end{aligned}$$

有9张相同的卡片，分别标有数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。从中随机抽取3张。

(1) 求抽取的3张卡片上的数字中任意2个均不在下表的同一行且不在同一列的概率；

(2) 若抽取的3张卡片上的3个数字均为奇数或均为偶数记为情况①；若3个数字位于下表的同一行或同一列或同一对角线上记为情况②。当同时满足①②两种情况得3分，仅满足情况①得2分；仅满足情况②得1分；其他情况得0分。求得分的分布列及数学期望。

$$\begin{aligned} & \text{①} > \frac{1}{4} \quad \text{②} > \frac{1}{2} \\ & E(X) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

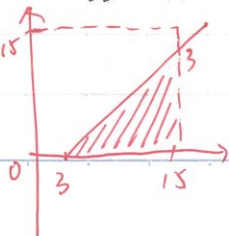
X	0	1	2	3
P	$\frac{16}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{42}$

1 3 5 7 9
4 6 8

①	2	3
4	⑤	6
7	8	⑨

15. 为提高英语口语水平，小王和小李相约早晨6:25—6:40在公园西门的英语角集合，一起练习英语口语。若两人在该时间段的每一时刻到达公园西门的可能性都相同，则小王比小李至少早到3分钟的概率为 $\frac{8}{25}$ 。

面积型几何模型
线性规划式表达



eg. 在[0,2]上取2个数，其和大于1的概率：
在0,1,2,3,4,5中可重复地选2个数，
其和大于4的概率。

15. 对任意两实数 a, b , 定义运算 " $*$ ": $a * b = \begin{cases} 2a - 2b, a \geq b \\ 2b - 2a, a < b \end{cases}$ 本段:

则函数 $f(x) = \sin x * \cos x$ 的值域为 $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

$$a * b = \begin{cases} 2(a-b), a \geq b \\ 2(b-a), a < b \end{cases}$$

$\star$ 即 $a * b = 2|a-b|$

D 11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x|, x \leq 0 \\ \ln x, x > 0 \end{cases}$

, 则函数 $g(x) = 2f(f(x)) - 1$ $f(x) - 1 = t$

B 1) -1 的零点个数

$$f(x) - 1 = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}$$

A. 7

B. 8

C. 10

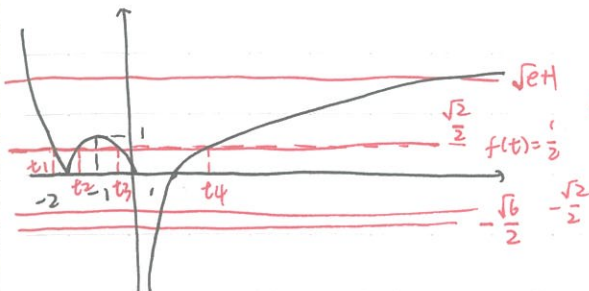
D. 11

复合函数分内外界

$$t_1 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, t_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, t_3 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, t_4 = \sqrt{e}$$

再令 $t = f(x) - 1$, 即 $y = t + 1$ 与 $f(x)$ 交点个数

$$\text{共有 } 2 + 4 + 1 + 1 = 8 \text{ 个}$$



12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} + 2^{-1-x} - 2, x \leq 0 \\ |\log_2 x|, x > 0 \end{cases}$, $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_3) = f(x_4)$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 有下述 4 个结论:

① $x_1 + x_2 = -2$; ② $x_3 x_4 = 1$; ③ $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x_3 < 1 < x_4 \leq \sqrt{2}$; ④ $0 <$

$$x_1 + x_2 \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2.$$

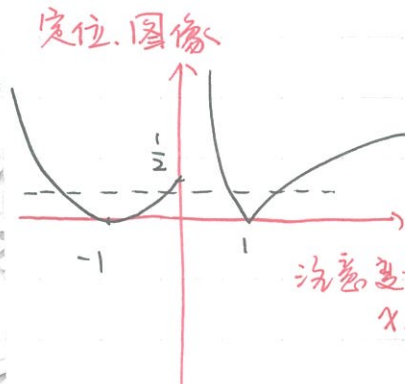
其中, 正确结论的个数是 ①②④

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



注意变量的范围
 $x_4 \in (1, \sqrt{2}]$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 + \frac{1}{x_4} + x_4$$

20. (本小题满分 12 分)

某电子玩具厂对销售人员的奖励制度如下: (假设 z 为月销售量, 单位是件)

① 当 $z \in [1800, 2000)$ 时, 当月给奖金 10 000 元;

② 当 $z \in [2000, 2400)$ 时, 当月给奖金 15 000 元;

③ 当 $z \in [2400, +\infty)$ 时, 当月给奖金 20 000 元;

已知该产品的月销售量 $(z \sim N(2000, 40000))$.

(1) 该公司销售人员的月奖金大约为多少元; (精确到整数元) 980

(2) 现从该厂一批产品中, 随机抽出 10 件产品进行检验, 已知该产品是合格品的概率为 p ($0 < p < 1$), 记这 10 件产品中恰有三件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值以及相应的 p 值.

(参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$)

已知 A, B 两点在球 O 的球面上, 过直线 AB 的两个平面所成的锐二面角为 60° , 两平面与球面的交线分别为圆 C 和圆 D , 圆 C 的半径为 1, 圆 D 的半径为 2, 且 AB 是圆 C 的一条直径, 则该球的半径为 $\sqrt{5}$

外接球模型 d 平面夹角

$e^x - a \ln(ax-1) + 1 \geq 0$ 对 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 成立, a 的最大值为 $e+1$

9. 某省医疗单位派 4 名男医护人员和 2 名女医护人员到 A, B, C, D 四家医院调研, 要求每家医院至少去 1 人, 至多去 2 人, 且 2 名女医护人员去同一家医院, 则不同的安排方法有

A. 72 种

B. 96 种

C. 144 种

D. 288 种

$A \ B \ C \ D$
男1 男2 男3 男4 女1 女2

$$4 \times \frac{C_4^2 \times C_2^1 \times C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 144$$

注意无序消除顺序

8. 将 5 名冬奥会志愿者分配到北京、延庆、张家口三个赛区参加活动, 北京赛区至少分配 2 名志愿者, 其它赛区至少分配 1 名志愿者, 每名志愿者只分配到 1 个赛区, 则不同的分配方案共有

A. 80 种

B. 50 种

C. 40 种

D. 25 种

$$C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1$$

$$1 \cdot 2 \times 2$$

由题:

北 延 张

2 2 1
2 1 2

※注意※

北 延 张

3 1 1

$$C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 \cdot A_2^2 + C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 60 + 20 = 80$$

$\Delta \quad ae^x + \ln a \geq \ln(x+2) + 2$ 恒成立, 则 a 的范围是

$$\frac{ae^x + \ln a}{x+2} \geq \frac{\ln(x+2) + 2 - \ln a}{x+2}$$

↓

$x = -1$ 极小值

$$\frac{a}{e}$$

↓

$x = \frac{a}{e} - 2$

$$\text{极大值 } \frac{e}{a}$$

$$\frac{a}{e} \geq \frac{e}{a} \quad (a > 0) \Rightarrow \underline{\underline{a \geq e}}$$

凹凸反转时

一般适用于 2 个极值点 x_0 相同的函数

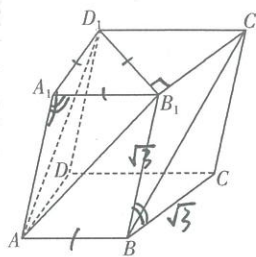
$$\text{即 } f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$$

斜柱建构

20. (12分) 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle AA_1B_1 = \angle D_1A_1A$, $\triangle A_1B_1D_1$ 是等边三角形, $D_1B_1 \perp BC$.

(1) 求证: $C_1B \perp B_1D_1$;

(2) 若 $BB_1 = BC = \sqrt{3}$, $AB = 1$, $\angle B_1BC = 60^\circ$, 求直线 BC_1 与平面 AD_1B_1 所成角的正弦值.



建构/几何法求线线—线面—面面角

• 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB=AD=AA_1=2$, $\angle BAD=60^\circ$. 点 A_1 在平面 $ABCD$ 内的射影是 AC 与 BD 的交点 O . BD 与 AA_1 所成角为 _____.

如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BC \perp CD$, $AB \parallel CD$, $BC = \sqrt{3}$, $AA_1 = AB = AD = 2$, 且 P 为 BB_1 的中点.

$$(x-1)(x-4) \approx a^2 = 4$$

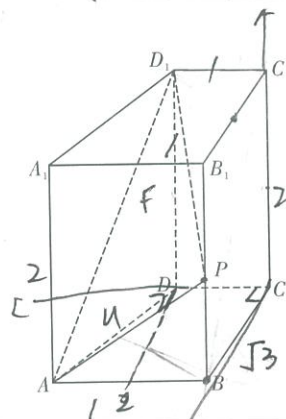
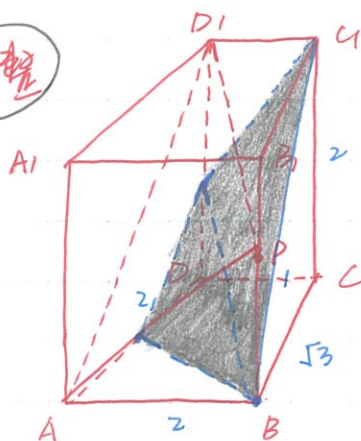
(1) 设过 B 点的平面为 α , 若平面 $\alpha \parallel$ 平面 APD_1 , 求平面 α 与四边形 B_1BCC_1 和四边形 C_1CDD_1 交线的长度之和;

$$f_1 + f_2$$

f_2

平面交线找法

找平行线组 记得找完整



法向量计算行列式

在一个平面中有 $\vec{a} = (i_1, j_1, k_1)$ $\vec{b} = (i_2, j_2, k_2)$

乱序公式

背景: 有3封信给A,B,C的不同的信, 全送错的可能有2种

3个元素乱序 $\Rightarrow$ 2种

4个元素乱序 $\Rightarrow$ 9种

5个元素乱序: 44种

★ $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ 乱序通项. 研究: $a_n =$

$$a_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad n \text{ 维乱序公式}$$

斐波那契数列 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (特殊) a_n

思考题: 做七选五时, 随机选取5个不同的选项, 则其得分期望为?

▷ $a = \log_3 2$ $b = \log_{11} 5$ $c = \lg 4$. 则 abc 大小关系为 多少啊!

二分法 (无公共关系)

$$a = \frac{\lg 2}{\lg 3} \quad c = \frac{\lg 2}{\frac{1}{2}} \quad a > c$$

$a, b > \frac{1}{2}$. 取 $\frac{2}{3}$

$$a - \frac{2}{3} = \frac{\lg 2}{\lg 3} - \frac{2}{3} = \frac{3\lg 2 - 2\lg 3}{3\lg 3} < 0$$

$$b - \frac{2}{3} = \frac{\lg 5}{\lg 11} - \frac{2}{3} = \frac{3\lg 5 - 2\lg 11}{3\lg 11} > 0$$

$$\therefore \underline{b > a > c}$$

△ 常见指对比大小特殊数

$$\lg 2 \approx 0.69 \quad \lg 3 \approx 1.1 \quad \lg 4 \approx 1.39 \quad \lg 5 \approx 1.61$$

$$\lg 6 \approx 1.79 \quad \lg 7 \approx 1.95 \quad \lg 8 \approx 2.08 \quad \lg 9 \approx 2.20 \quad \lg 10 \approx 2.30$$

$$\lg 3 \approx 0.47 \quad \lg 4 \approx 0.60 \quad \lg 5 \approx 0.7 \quad \lg 2 \approx 0.3 \quad \lg 6 \approx 0.78 \quad \lg 7 \approx 0.85$$

$$\lg 8 \approx 0.90 \quad \lg 9 \approx 0.95$$

△ 柯特立定理: 若 $c > a > 1$, $\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c} > 1$ 则 $\log_a b > \log_c d$

$$\text{即 } \log_2^3 \geq \log_3^4 \geq \log_4^5 > \dots > \log_n^{n+1}$$

$$\log_3^5 > \log_4^6 > \log_5^7 > \dots > \log_n^{n+2}$$

$$\lg \pi \approx 0.497$$

$$\ln \pi \approx 1.447$$

$$\lg e \approx 0.434$$

$$\sqrt{e} \approx 1.6487$$

$$\sqrt{\pi} \approx$$

P P 12

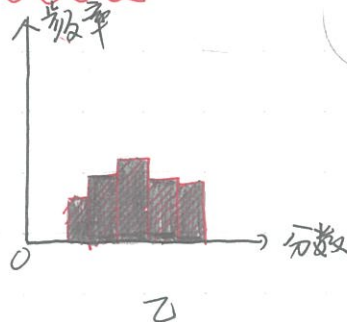
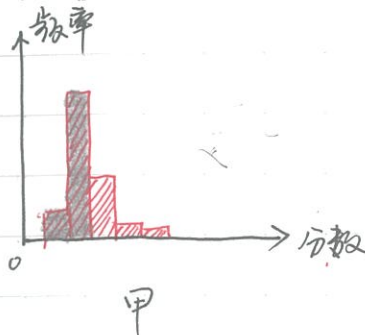
- $\triangle ABC$ 中, $a^2 + b^2 + c^2 = 8$. 则 $S_{\triangle ABC \max} = \underline{\frac{2}{5}\sqrt{5}}$.

种

推论: $\triangle ABC$ 中, $xa^2 + yb^2 + zc^2 = M$ (M 为常数)

$$\text{则 } S_{\triangle ABC \max} = \frac{\frac{4}{3}M}{\sqrt{xy+yz+xz}} \times \frac{1}{4}$$

- 标准差, 方差反应的是 波动程度



差异: 乙 > 甲

乙范围广, 波动程度更大

- 阿波罗尼斯圆半径

$$r = \frac{\lambda}{|n - \frac{1}{n}|}$$

$$\frac{AB}{AC} = n \quad \lambda = |BC|$$

$$\lg 5 > \lg 2 \quad \frac{\lg 5}{\lg 10} > \frac{\lg 2}{\lg 10}$$

$$\lg 5 > \frac{\lg 2}{\lg e} \quad \lg 5 > \lg 10 \lg 2$$

$$\lg 5 > \frac{\lg 2}{\lg e} \quad \lg(2x+1) > -\lg 10 \lg x$$

- 不等式群: (调几对算平)

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a-b}{\ln a - \ln b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\frac{a-b}{\ln a - \ln b} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{e^x - e^y}{x - y} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$$

对数均值不等式

对数均值不等式指数形式

- 以直代曲法 $\sqrt{1.04}$ 中, 令 $f(x) = \sqrt{x}$

$$\sqrt{1.04} = f(1+0.04) \approx f(1) + f'(1) \times 0.04 = 1 + \frac{1}{2} \times 0.04 = 1.02$$

切线放缩

越小区间越精确

因此即可秒杀 $\ln 1.02$, $2\ln 1.01$, $\sqrt{1.04} - 1$ 的大小 (2021 全国乙 12)